

МРНТИ 25.37.25

<https://doi.org/10.26577/JPEOS20261281>**Л.А. Алексеева** 

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
e-mail: alexeeva@math.kz

СВЕРХЗВУКОВЫЕ ВИБРОТРАНСПОРТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

Исследуется воздействие вибротранспортных источников излучения волн в средах, которые связаны с движущимися объектами, скорость движения которых может быть дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а в средах с несколькими звуковыми скоростями (упругие, например) еще и трансзвуковой. Здесь строятся фундаментальные и регулярные вибротранспортные решения волнового уравнения при сверхзвуковых скоростях движения источника возмущений при любых числах Маха, больших 1, в пространствах физической размерности ($N = 1, 2, 3$). Построены фундаментальные решения этих уравнений – функции Грина, которые описывают динамику среды при движении сосредоточенного в точке источника, который движется с постоянной скоростью и вибрирует с постоянной частотой. На его основе построены обобщенные решения вибротранспортного уравнения при действии как распределенных в пространстве движущихся виброисточников, так и сосредоточенных на движущихся поверхностях и линиях.

Построенные решения позволяют строить решения многих уравнений механики сплошных сред для такого типа движущихся сверхзвуковых источников возмущений в изотропных средах и найдут обширные применения при решении различных инженерно-технических задач.

Ключевые слова: волновое уравнение, сверхзвуковая скорость, число Маха, вибротранспортные решения, функция Грина, преобразование Фурье, ударные волны, условия на фронтах.

L.A. Alexeyeva

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
e-mail: alexeeva@math.kz

Supersonic vibrotransport solutions of the wave equation and their properties

Here the effect of vibrotransport sources of wave radiation in media is investigated which are associated with moving objects, the speed of which can be subsonic, sonic, supersonic, in media with several sonic speeds (elastic, for example) also transonic. The fundamental and regular vibrotransport solutions of the wave equation are constructed for supersonic speeds of the disturbance source at any Mach numbers greater than 1, in spaces of physical dimension ($N = 1, 2, 3$). Fundamental solutions of these equations are constructed – Green's functions, which describe the dynamics of the medium during the movement of a source concentrated at a point, which moves with a constant speed and vibrates with a constant frequency. On its basis, generalized solutions of the vibrotransport equation are constructed under the action of both moving vibration sources distributed in space and concentrated on moving surfaces and lines. These solutions allow constructing solutions of many equations of continuum mechanics for this type of moving supersonic sources of disturbances in isotropic media and will find extensive applications in solving various engineering and technical problems.

Keywords: wave equation, supersonic speed, Mach number, vibrotransport solutions, Green's function, Fourier transform, shock waves, conditions on fronts.

Л.А. Алексеева

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан
e-mail: alexeeva@math.kz

Толқындық теңдеудің дыбыс-дірілді тасымалдану шешімдері және олардың қасиеттері

Мұнда қозғалатын объектілермен байланысты толқындық сәулелену көздерінің ортаға әсерін зерттейміз, олардың жылдамдығы дыбыстық, трансономикалық, дыбыстан жоғары, бірнеше дыбыстық жылдамдықтары бар орталарда (мысалы, серпімді) және трансономикалық болуы мүмкін. Физикалық өлшемдік кеңістіктерде ($N = 1, 2, 3$) 1-ден асатын кез келген Мах сандарында

бұзылу көзінің дыбыстан жоғары жылдамдықтары үшін толқын теңдеуінің негізгі және тұрақты діріл тасымалдау шешімдері құрастырылған. Бұл теңдеулердің іргелі шешімдері – тұрақты жылдамдықпен қозғалатын және тұрақты жиілікте тербелетін нүктеде шоғырланған көздің қозғалысы кезінде ортаның динамикасын сипаттайтын Грин функцияларын құрастырған. Оның негізінде кеңістікте таралған және қозғалатын беттер мен түзулерде шоғырланған қозғалмалы тербеліс көздерінің әсерінен тербеліс беріліс теңдеуінің жалпыланған шешімдері құрастырылған. Бұл шешімдер изотропты ортадағы қозғалатын дыбыстан жоғары бұзылу көздерінің осы түрі үшін континуум механикасының көптеген теңдеулерінің шешімдерін құруға мүмкіндік береді және әртүрлі инженерлік есептерді шешуде кеңінен қолданылады.

Түйін сөздер: толқын теңдеуі, дыбыстан жоғары жылдамдық, Мах саны, тербеліс беру шешімдері, Грин функциясы, Фурье түрлендіруі, соққы толқындары, фронттардағы шарттар.

Введение

Исследование процессов распространения волн в сплошных средах и электромагнитных полях приводит к решению систем дифференциальных уравнений в частных производных различного типа и определению их решений в виде векторных полей, которые описывают различные характеристики динамических процессов. Это могут быть, например, перемещения и скорости, как в упругих и многокомпонентных средах, или напряжённости электромагнитных полей, изменение которых в пространстве и времени позволяет моделировать такие процессы и изучать их математическими методами.

Как известно, любое векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_j(\mathbf{x}, t)\mathbf{e}_j$ можно представить через скалярный и векторный потенциалы (φ , $\boldsymbol{\psi}$) в виде (Mors & Feshbakh, 2013):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t) + \text{rot } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t),$$

которые описывают дилатационные и вихревые волны в рассматриваемой среде. В изотропных средах, как правило, они удовлетворяют волновым уравнениям:

$$\square_{c_\varphi} \varphi = f(\mathbf{x}, t), \quad \square_{c_\psi} \boldsymbol{\psi} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t),$$

поскольку скорость распространения волн в таких средах всегда конечная и не зависит от направления распространения волны. Скорость движения может быть разной у этих волн, как в упругих средах, где сдвиговые волны, описываемые векторным потенциалом, распространяются медленнее дилатационных. А в электромагнитной среде, описываемой уравнениями Максвелла, они одинаковые. Это делает исследование решений волновых уравнений необходимым и актуальным.

Среди действующих источников возмущений в различных средах наиболее распространены транспортные, которые связаны с движущимися источниками (нагрузками), форма которых не меняется с течением времени, а скорость движения может быть дозвуковой, звуковой, сверхзвуковой, а в средах с несколькими звуковыми скоростями (упругие, например) еще и трансзвуковой. В работах (Alekseeva, 1991; Alekseyeva, 1994; Alekseyeva, 1998; Alexeyeva & Kayshibayeva, 2016; Alekseyeva, 2008; Alexeyeva, 2010) построены транспортные решения волновых уравнений и уравнений теории упругости, и, на основе метода обобщенных функций, разработан метод граничных интегральных уравнений для решения стационарных транспортных дозвуковых и сверхзвуковых краевых задач в областях с цилиндрической формой границ. Отметим, что число работ по исследованию воздействия транспортных нагрузок на окружающую среду в последние десятилетия растет в связи с интенсивным строительством высокоскоростных дорожных и подземных транспортных магистралей и имеет довольно обширную библиографию, с которой можно ознакомиться в статьях и монографиях (Alexeyeva, 2017; Chattopadhyay et al., 2011; Chattopadhyay & Singh, 2012; Hoop, 2002; Sheng, et al., 1999; Egger, 2000; Brezhnev et al., 2005; Ukrainets, 2006).

Есть еще один очень важный для приложений класс источников возмущений (действующих сил и нагрузок), которые не только движутся с различными скоростями, но еще и пульсируют (вибрируют, колеблются) с определенной частотой. В качестве примера можно привести различные электромагнитные излучатели, движущиеся элементарные частицы, подвижный вибротранспорт и т.п. Поэтому актуальным является математическое моделирование таких процессов с учетом, вида источника,

скорости его движения и частоты вибрации. Класс таких модельных задач при дозвуковых скоростях движения при числах Маха $M < 1$ рассмотрен в статье (Alekseyeva, 2024).

Здесь строятся фундаментальные и регулярные вибротранспортные решения волнового уравнения при сверхзвуковых и звуковых скоростях при числах Маха $M \geq 1$ в пространствах размерности $N=1,2,3$. Построены функции Грина, которые описывают динамику среды при движении сосредоточенного в точке виброисточника, и на их основе общие решения вибротранспортного уравнения при действии как распределенных в пространстве движущихся виброисточников, так и сосредоточенных на движущихся поверхностях и линиях.

Построенные решения позволяют строить решения многих уравнений механики сплошных сред для такого типа движущихся источников возмущений в средах и имеют обширные применения при решении различных инженерно-технических задач.

1. Волновое уравнение Даламбера и его свойства

Рассматривается многомерный аналог уравнения Даламбера:

$$\square_c u \equiv \Delta u - c^{-2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g(x, t), \quad (1)$$

$x \in R^N$, $t \in R^1$; $\square_c$ – волновой оператор, Δ – оператор Лапласа, $g(x, t)$ – обобщенная функция из класса обобщенных функций медленного роста.

Уравнение (1.1) строго гиперболическое, класс его решений содержит разрывные по производным функции (Vladimirov, 1978; Petrovskiy, 1961). Поверхности разрыва (F) в R^{N+1} – это характеристические поверхности уравнения (1), которые удовлетворяют характеристическому уравнению в пространстве $R^{N+1} = \{(x, \tau \equiv ct)\}$:

$$v_\tau^2 = \sum_{j=1}^N v_j^2. \quad (2)$$

где $v(x, \tau) = (v_1, \dots, v_N, v_\tau)$ – вектор нормали к F , $\tau = ct$. Ему соответствует конус характеристических нормалей – световой конус, для которого

го $v_\tau = v_{N+1} < 0$. В R^N такие поверхности движутся с единичной скоростью по τ :

$$1 = -v_\tau / \|v\|_N, \quad \|v\|_N = \sqrt{v_j v_j} \quad (3)$$

(по повторяющимся индексам i, j в произведении здесь и далее всюду проводится суммирование от 1 до N). В пространстве R^N им соответствуют *волновые фронты* (F_t), движущиеся со скоростью c по времени t . На них выполняется условие Адамара:

$$[u]_{F_t} = -cn_i [u_{,i}]_{F_t}, \quad (4)$$

где через $[f(x, t)]_{F_t}$ обозначен скачок f на F_t :

$$\begin{aligned} [f(x, t)]_{F_t} &= f^+(x, t) - f^-(x, t) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (f(x + \varepsilon n, t) - f(x - \varepsilon n, t)), \end{aligned}$$

$x \in F_t$, $n(x, t)$ – единичный вектор нормали к F_t , направленный в сторону распространения фронта волны:

$$n_i = \frac{v_i}{\|v\|_N} = \frac{\text{grad } F_t}{\|\text{grad } F_t\|}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5)$$

Класс подобных решений гиперболических уравнений называют *ударными волнами*.

Непрерывные решения волнового уравнения (1), удовлетворяющие (4) на фронтах ударных волн, называем *классическими*.

2. Постановка вибротранспортной задачи

Назовем функцию источника $g(x, t)$ *вибротранспортной*, если она представима в виде

$$g(x, t) = g(x_1, x_2, x_3 + Vt) e^{-i\omega t}, \quad (6)$$

где V – скорость движения источника колебаний вдоль оси X_3 , ω – частота колебаний, $\omega > 0$. При $\omega = 0$ нагрузка *транспортная*.

Если правая часть (1) имеет аналогичный вид, то естественно искать решение в подобном виде:

$$u(x, t) = u(x_1, x_2, x_3 + Vt) e^{-i\omega t}. \quad (7)$$

Для этого перейдём в подвижную систему координат $(x_1, x_2, z = x + M\tau)$, $\tau = ct$, $M = V/c$ - число Маха. Назовём источник *дозвуковым*, если $M < 1$, *сверхзвуковым*, если $M > 1$, и *звуковым*, если $M = 1$. В новой системе координат решение имеет вид:

$$u = u(x_1, x_2, z)e^{ik\tau}, \quad k = \omega/c. \quad (8)$$

Тогда, как следует из (1), амплитуда колебаний является решением *вибротранспортного уравнения* (ВТУ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i k M \frac{\partial u}{\partial z} + k^2 u = g(x, z), \quad x \in R^2, z \in R^1 \quad (9)$$

Обозначим $m = \sqrt{1 - M^2}$. Тогда, в зависимости от скорости источника, имеем три разных уравнения:

при $M < 1$ *дозвуковое эллиптическое*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i k M \frac{\partial u}{\partial z} + k^2 u = g(x, z); \quad (10)$$

при $M > 1$ - *сверхзвуковое гиперболическое*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - m^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i k M \frac{\partial u}{\partial z} + k^2 u = g(x, z); \quad (11)$$

при $M = 1$ - *звуковое параболическое*

$$\begin{aligned} \bar{f}(\xi, \zeta) &= \int_R f(x, z) \exp(i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + z \zeta)) dx_1 dx_2 dz \\ f(x, z) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_R \bar{f}(\xi, \zeta) \exp(-i(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + z \zeta)) d\xi_1 d\xi_2 d\zeta \end{aligned} \quad (14)$$

Тогда из (15) получим

$$\begin{aligned} -(\|\xi\|^2 + (1 - M^2)\zeta^2 - 2kM\zeta - k^2) \bar{U} &= 1, \\ \xi \in R^2, \zeta \in R^1. \end{aligned}$$

Откуда следует: при $M < 1$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + 2i k M \frac{\partial u}{\partial z} + k^2 u = g(x, z). \quad (12)$$

Требуется построить решение этих уравнений при правых частях из класса обобщенных функций медленного роста $S'(R^2 \times R_+)$, $R_+ = [0, +\infty)$.

3. Фундаментальные решения вибротранспортного уравнения. Преобразование Фурье

Для построения решений гиперболического уравнения (11), построим функцию Грина – фундаментальное решение $U(x, z)$ этого уравнения с дельта-функцией в правой части:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + (1 - M^2) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\ + 2i k M \frac{\partial U}{\partial z} + w^2 U = \delta(x) \delta(z), \end{aligned} \quad (13)$$

которое удовлетворяет определенным условиям затухания на бесконечности, различные для каждого случая. И далее, используя свойство функции Грина, построим решения ВТУ для подвижных виброисточников, распределенных в ограниченных объемах, либо сосредоточенных на криволинейных линиях.

Для построения решений используем преобразование Фурье обобщенных функций, которое для суммируемых регулярных обобщенных функций совпадает с классическим преобразованием Фурье:

$$\bar{U} = -\frac{1}{\|\xi\|^2 - (M^2 - 1)\zeta^2 - 2kM\zeta - k^2}, \quad (15)$$

при $M > 1$

$$\bar{U} = -\frac{1}{\|\xi\|^2 - m^2 \zeta^2 - 2kM\zeta - k^2}; \quad (16)$$

при $M = 1$

$$\bar{U} = -\frac{1}{\|\xi\|^2 - 2k\xi - k^2}. \quad (17)$$

Дозвуковой случай рассмотрен ранее в (Ukrainets, 2006). Здесь в статье рассмотрим сверхзвуковые решения.

Вид оригинала зависит от размерности пространства, в котором это уравнение рассматривается. Здесь построим $U(x, z)$ для пространств физической размерности $N=3, 2, 1$.

4. Функция Грина и общее решение сверхзвукового ВТУ в 3D пространстве

4.1. Решение неоднородного ВТУ. Для восстановления оригиналов используем свойства линейных преобразований переменных Фурье в пространстве преобразований Фурье, а именно

$$\begin{aligned} & F^{-1}[\bar{f}(A(\xi + d))] = \\ & = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{R^N} \bar{f}(A(\xi + d)) e^{-i(\xi, x)} dV(\xi) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{(2\pi)^N |\det A|} \int_{R^N} f^*(\zeta) e^{-i(A^{-1}\zeta - d, x)} dV(\xi) = \\ & = \frac{e^{i(d, x)}}{(2\pi)^N |\det A|} \int_{R^N} \bar{f}(\zeta) e^{-i(\xi, (A^{-1})^T x)} dV(\xi) = \quad (18) \\ & = \frac{e^{i(d, x)}}{|\det A|} f((A^{-1})^T x) \end{aligned}$$

Т е о р е м а 1. Функция Грина вибротранспортного уравнения (13) в 3D пространстве в подвижной системе координат при $M > 1$ представима в виде:

$$\begin{aligned} U(x, z) = \\ = -\frac{e^{izwM/m^2}}{2\pi\sqrt{z^2 - m^2r^2}} \cos\left(\frac{w}{m}\sqrt{z^2 - m^2r^2}\right) H(z - mr), \quad (19) \end{aligned}$$

$U(x, z) = 0$ при $\{(x, z) \in R^3 : z < mr\}$,
 $U(x, z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$. В исходной системе координат функция Грина имеет вид:

$$U(x_1, x_2, x_3, t) = -\frac{H(x_3 + Vt - mr) e^{i(x_3 + Vt)kM/m^2}}{2\pi\sqrt{(x_3 + Vt)^2 - m^2r^2}} \cos\left(\frac{k}{m}\sqrt{(x_3 + Vt)^2 - m^2r^2}\right), \quad (20)$$

$U(x_1, x_2, x_3, t) = 0$ при $x_3 < mr - Vt$,
 $U(x_1, x_2, x_3, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для любых (x_1, x_2, x_3) .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В сверхзвуковом случае преобразуем формулу (16) к виду:

$$\begin{aligned} \bar{U} & = -\frac{1}{\|\xi\|^2 - m^2(\zeta^2 + 2kM\zeta/m^2) - k^2} = \\ & = -\frac{1}{\|\xi\|^2 - m^2(\zeta + kM/m^2)^2 - (k/m)^2}. \end{aligned}$$

Здесь $m = \sqrt{M^2 - 1}$. Для восстановления оригинала используем фундаментальное решение уравнения Клейна-Гордона:

$$\Delta_2 \Phi - v^{-2} \Phi_{,zz} + q^2 \Phi = \delta(x) \delta(z), \quad y \in R^2, \quad z \in R^1.$$

Его преобразование Фурье равно

$$\bar{\Phi} = -\frac{1}{(\|\xi\|^2 - v^{-2}\zeta^2 - q^2)}, \quad \xi \in R^2, \quad \zeta \in R^1.$$

Оно имеет следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \Phi(y, z) & = -\frac{\cos(q\sqrt{v^2z^2 - \|y\|^2})}{2\pi\sqrt{v^2z^2 - \|y\|^2}} H(vz - \|y\|), \quad (23) \\ & y \in R^2. \end{aligned}$$

Аналогично, сравнивая константы и используя свойство трансформанты Фурье (20), получим функцию Грина вибротранспортного уравнения в сверхзвуковом случае:

$$\begin{aligned} U(x, z) = \\ = -\frac{e^{izkM/m^2}}{2\pi k\sqrt{z^2 - m^2r^2}} \cos\left(\frac{k}{m}\sqrt{z^2 - m^2r^2}\right) H(z - mr). \quad (22) \end{aligned}$$

Ее носителем является конус $z > mr$, на поверхности которого она обращается в бесконечность. Она стремится к нулю при $z \rightarrow +\infty$.

4.2. Решения однородного ВТУ при $N=3$. Теперь построим решения однородного ВТУ:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^0}{\partial x_2^2} - m^2 \frac{\partial^2 u^0}{\partial z^2} + 2i k M \frac{\partial u^0}{\partial z} + k^2 u^0 = 0, \quad (23)$$

$$x \in R^2, z \in R^1.$$

В пространстве преобразований Фурье, оно имеет вид:

$$(\|\xi\|^2 - m^2 \zeta^2 - 2Mk\zeta - k^2) \bar{u}^0 = 0 \quad \xi \in R^2, \zeta \in R^1.$$

Решение этого уравнения имеет вид $\bar{u}^0 = \beta(\xi, \zeta) \delta_S(\xi, \zeta)$ - сингулярная обобщённая функция - простой слой на поверхности S , на которой

$$\|\xi\|^2 - m^2 \zeta^2 - 2Mk\zeta = k^2. \quad (24)$$

Решение имеет вид интеграла по этой поверхности

$$u_0(x, z) = \int_S \beta(\xi, \zeta) e^{-i(\xi, x)} e^{-i\zeta z} dS(\xi, \zeta), \quad (25)$$

$$\xi = (\xi_1, \xi_2).$$

Здесь плотность простого слоя $\beta(\xi, \zeta)$ - произвольная интегрируемая на S функция. Если ввести замену переменных $\zeta = \zeta + kM / m^2$, то формула (27) преобразуется к виду:

$$\|\xi\|^2 - m^2 \left(\zeta + kM / m^2 \right)^2 = \frac{k^2}{m^2}. \quad (26)$$

Это уравнение конуса с вершиной в точке $(0, 0, \zeta = -kM / m^2)$, поскольку носитель фундаментального решения лежит в области $z \geq 0$.

4.3. Общее решение ВТУ при $N=3$. Теперь можем дать формулу общего решения ВТУ при сверхзвуковых скоростях.

Т е о р е м а 1. При $M > 1$ решение ВТУ в 3D-пространстве представимо в виде:

$$u(x, z) = U(x, z) * g(x, z) H(z) + u^0(x, z). \quad (27)$$

Если $g(x, z)$ - регулярная функция и $g(x, z) \in L_1(R^3)$, то

$$U(x, z) * g(x, z) = \int_{R^3} U(x - y, z - h) g(y, h) dy_1 dy_2 dh. \quad (28)$$

Если $g(x, z)$ - сингулярная обобщённая функция, сосредоточенная на поверхности S :

$$g(x, z) = \alpha(x, z) \delta_S(x, z), \quad \alpha(x, z) \in L_1(S), \text{ то}$$

$$U(x, z) * g(x, z) = \int_S U(x - y, z - h) g(y, h) dS(y, h) \quad (29)$$

Если $g(x, z)$ - сосредоточенная на кривой l сингулярная функция:

$$g(x, z) = \beta(x, z) \delta_l(x, z), \quad \beta(x, z) \in L_1(l), \text{ то}$$

$$U(x, z) * g(x, z) = \int_l U(x - y, z - h) g(y, h) dl(y, h). \quad (30)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z)$ дифференциальный оператор ВТУ (11). Подставляя (27) в (11) получим требуемое:

$$VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z) (U * g + u^0) =$$

$$= \{VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z) U\} * g + VT(\partial_1, \partial_2, \partial_z) u^0 =$$

$$= \delta(x, z) * g + 0 = g(x, z).$$

Если $u_1(x, z)$ - любое решение (11), то $u_2(x, z) = u(x, z) - u_1(x, z)$ является решением однородного ВТУ (23). Следовательно $u_1(x, z) = u(x, z) - u_2(x, z)$. Т. е. имеет аналогичный $u(x, z)$. Ч. т. д.

5. Функция Грина и общее решение сверхзвукового ВТУ в 2D пространстве

5.1. Функция Грина $N=2$. Построим функцию Грина $U(x, z)$ аналогично вышеизложенному. В этом случае

$$\bar{U} = - \frac{1}{\xi^2 - m^2 \left(\zeta + kM / m^2 \right)^2 - (k / m)^2}.$$

Здесь для восстановления оригинала используем фундаментальное решение двухмерного уравнения Клейна-Гордона:

$$\Phi_{,xx} - c^{-2}\Phi_{,tt} + q^2\Phi = \delta(x)\delta(t), \quad (x, t) \in R^2.$$

Его преобразование Фурье равно

$$\bar{\Phi} = -\frac{1}{\xi^2 - c^{-2}\zeta^2 - q^2}, \quad (\xi, \zeta) \in R^2.$$

Здесь J_0 - функция Бесселя. Оно имеет следующий вид [17]:

$$\Phi(x, t) = -\frac{c}{2}H(ct - |x|)J_0\left(0.5q\sqrt{c^2t^2 - x^2}\right). \quad (31)$$

Аналогично, сравнивая константы и используя свойство трансформанты Фурье (20), получим функцию Грина вибротранспортного уравнения в сверхзвуковом случае. Результат сформируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 2. *Функция Грина вибротранспортного уравнения (13) в 2D-пространстве при $M > 1$ в подвижной системе координат представима в виде:*

$$U(x, z) = -\frac{m}{2}H(z - m|x|)J_0\left(\frac{k}{2m^2}\sqrt{z^2 - m^2x^2}\right). \quad (32)$$

$$U(x, z) = 0 \text{ при } \{(x, z) \in R^2 : z < m|x|\},$$

$$U(x, z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow +\infty, \quad |x| < z/m.$$

Свойства функции Грина следуют из её представления. Её носитель на плоскости (x, z) это угол: $z > m|x|$, на границе которого $z = m|x|$ она испытывает скачок, равный 1, т.к.

$$J_0(0) = 1. \quad \text{При } z \rightarrow +\infty \quad U(x, z) \rightarrow 0, \quad \text{т.к.}$$

$$J_0\left(\frac{zw}{2m^2}\right) \rightarrow 0. \quad \text{В исходной системе координат}$$

функция Грина имеет следующий вид:

$$U(x_1, x_2, t) = -\frac{m}{2}H(x_2 + Vt - m|x_1|)J_0\left(\frac{k}{2m^2}\sqrt{(x_2 + Vt)^2 - m^2x_1^2}\right).$$

$$U(x_1, x_2, t) = 0 \text{ при } x_2 < m|x_1| - Vt, \quad U(x_1, x_2, t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty \text{ для любых } (x_1, x_2).$$

5.2. Решения однородного ВТУ при $N=2$. Теперь построим решения однородного ВТУ:

$$\frac{\partial^2 u^0}{\partial x_1^2} + 2i k M \frac{\partial u^0}{\partial z} + k^2 u^0 = 0, \quad (x, z) \in R^2. \quad (33)$$

В пространстве преобразований Фурье, оно имеет вид:

$$\begin{aligned} &(\xi^2 - m^2\zeta^2 - 2Mk\zeta - k^2)\bar{u}^0(\xi, \zeta) = \\ &= (\xi^2 - m^2(\zeta + kM/m^2)^2 - (k/m)^2)\bar{u}^0(\xi, \zeta) = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Решение этого уравнения $\bar{u}^0 = \beta(\xi, \zeta)\delta_S(\xi, \zeta)$ - сингулярная обобщённая функция - простой слой на линии l , на которой

$$\xi^2 - m^2(\zeta + kM/m^2)^2 = (k/m)^2. \quad (35)$$

Если ввести замену переменных $\zeta = \zeta + kM/m^2$, то формула преобразуется к виду:

$$(\xi + m\zeta + kM/m)(\xi - m\zeta - kM/m) = \frac{k^2}{m^2}.$$

Это уравнение гиперболы с вершиной в точке $(0, 0, \zeta = -kM/m^2)$. Решение имеет вид криволинейного интеграла по этой гиперболе:

$$u_0(x, z) = \int_l \beta(\xi, \zeta) e^{-i(\xi x + \zeta z)} dl(\xi, \zeta). \quad (37)$$

Здесь плотность простого слоя $\beta(\xi, \zeta)$ - произвольная интегрируемая на L функция.

5.3. Общее решение ВТУ при $N=2$. Теперь можем дать формулу общего решения ВТУ при сверхзвуковых скоростях.

Т е о р е м а 2. *При $M > 1$ решение ВТУ в 2D-пространстве представимо в виде:*

$$u(x, z) = U(x, z) * g(x, z)H(z) + u^0(x, z).$$

Если $g(x, z)$ - регулярная функция и $g(x, z) \in L_1(R^2)$, то

$$U(x, z) * g(x, z) = \int_{R^3} U(x - y, z - h)g(y, h)dy_1 dy_2 dh.$$

Если $g(x, z)$ - сосредоточенная на кривой l сингулярная функция:

$$g(x, z) = \beta(x, z)\delta_l(x, z), \quad \beta(x, z) \in L_1(l), \text{ то}$$

$$U(x, z) * g(x, z) = \int_l U(x - y, z - h)g(y, h)dl(y, h)$$

6. Функция Грина и общее решение сверхзвукового ВТУ в R^1

6.1. Функция Грина, $N=1$. В этом случае уравнение (11) имеет вид обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - \frac{2Mki}{m^2} \frac{du}{dz} - \frac{k^2}{m^2} u = -\frac{1}{m^2} g(z)H(z). \quad (40)$$

Т е о р е м а 4. Функция Грина вибротранспортного уравнения (42) представима в виде:

$$U(z) = \frac{m^2}{2k} sh\left(\frac{kz}{m^2}\right) e^{\frac{iMk}{m^2}z} H(z).$$

Общее решение имеет вид:

$$u(z) = c_1 e^{\alpha z(i+1/M)} - c_2 e^{\alpha z(i-1/M)} - \frac{1}{2w} H(z) \int_0^z g(z-\zeta) sh\left(\frac{k\zeta}{m^2}\right) e^{\frac{iMk}{m^2}\zeta} d\zeta,$$

где c_1, c_2 произвольные константы. Решение существует, если $\text{supp } g(z)$ — ограниченное множество, с конечным интервалом определения по z .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим его фундаментальное решение в виде $U(z) = \Phi(z)H(z)$, где $\Phi(z)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - \frac{2Mki}{m^2} \frac{d\Phi}{dz} - \frac{k^2}{m^2} \Phi = 0, \quad (41)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi'(0) = 1.$$

Его характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - \frac{2Mki}{m^2} \lambda - \frac{w^2}{m^2} = 0, \text{ — имеет 2 корня:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{Mki}{m^2} \pm k \sqrt{\frac{1}{m^2} - \frac{M^2}{m^4}} =$$

$$= \frac{k}{m^2} \left(Mi \pm \sqrt{m^2 - M^2 + 1} \right) =$$

$$= \frac{Mw}{m^2} (i \pm 1/M) = \alpha (i \pm 1/M).$$

Так как $\Phi(0) = 0$, значит

$$\Phi(z) = c \left(e^{\alpha z(i+1/M)} - e^{\alpha z(i-1/M)} \right) =$$

$$= c e^{i\alpha z} \left(e^{\alpha z/M} - e^{-\alpha z/M} \right) = c e^{i\alpha z} sh(\alpha z/M)$$

$$\Phi'(0) = 0 \Rightarrow$$

$$c \left(\alpha(i+1/M) - \alpha(i-1/M) \right) =$$

$$= 2\alpha c/M = 1 \Rightarrow c = \frac{m^2}{2k}$$

$$\Phi(z) = \frac{m^2}{2k} sh\left(\frac{kz}{m^2}\right) e^{\frac{iMk}{m^2}z} \Rightarrow$$

$$U(z) = \frac{m^2}{2k} sh\left(\frac{kz}{m^2}\right) e^{\frac{iMk}{m^2}z} H(z).$$

Отсюда следует первая формула теоремы. Вторая формула есть сумма полученных решений однородного уравнения и частного решения в виде свёртки фундаментального с правой частью уравнения.

Теорема доказана.

Заключение

Построенные здесь вибротранспортные решения волнового уравнения позволяют исследовать волновые процессы в различных изотропных средах при воздействии подвижных виброисточников волн различной природы. В частности, решения уравнений Ламе теории упругости с использованием потенциалов Ламе, которые удовлетворяют волновым уравнениям, позволяют исследовать напряжённо-деформированное состояние упругой среды при таких динамических процессах с широким применением в задачах геофизики и сейсмологии.

Построенные решения можно использовать для решения вибротранспортных краевых задач акустики, теории упругости и электродинамики,

подобно (Alekseyeva, 2008, Alexeyeva, 2010, Alexeyeva, 2017), используя построенные здесь функции Грина для построения ядер в интегральных представлениях решений этих задач.

Заметим также, что построенные решения при нулевой частоте вибрации описывают дозвуковые транспортные решения волнового, уже хорошо изученные автором ранее (Alekseeva, 1991; Alekseyeva, 1994; Alekseyeva, 1998; Alexeyeva & Kayshibayeva, 2016, Alekseyeva, 2008, Alexeyeva, 2010, Alexeyeva, 2017). А транспортные и вибротранспортные нагрузки – это один из самых распространённых источников возмущений в средах. Например, электромагнитные поля электромагнитных

излучателей на подвижных платформах, которые широко применяются в автомобильном и железнодорожном транспорте, можно моделировать с использованием построенных здесь решений. При этом для моделирования источников излучения, сосредоточенных на поверхностях, проводах или в точках, например, дипольного или мультипольного типа, следует использовать обобщённые функции типа простых, двойных слоёв или дельта-функций и их производных.

Работа выполнена при финансовой поддержке КН МНВО РК (грант AP19674789, 2023-2025 гг.)

Литературы

1. Alekseeva, L.A. (1991). Fundamental solutions in the elastic space in the case of running loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 55(5), 854–862.
2. Alekseyeva, L.A. (1994). Somigliana's formulae for solving the elastodynamics equations for travelling loads. *Applied Mathematics and Mechanics*, 58(1), 109–116.
3. Alekseyeva, L.A. (1998). Boundary element method of boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 11, 37–44.
4. Alekseyeva, L.A. (2008). Obobshchennye resheniya krayevykh zadach dlya odnogo klassa begushchikh resheniy volnovoogo uravneniya [Generalized solutions of boundary value problems for one class of running solutions of the wave equation]. *Matematicheskii zhurnal*, 8(2), 1–19.
5. Alekseyeva, L.A. (2024). Dozvukovye vibrotransportnye resheniya volnovoogo uravneniya v prostranstvakh razmernosti $N=1, 2, 3$ [Subsonic vibrotransport solutions of the wave equation in spaces of dimension $N=1, 2, 3$]. *Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya*, 4, 42–59. <https://doi.org/10.32014/2024.2518-1726.306>
6. Alexeyeva, L.A. (2010). Singular border integral equations of the BVP of elastodynamics in the case of subsonic running loads. *Differential Equations*, 46(4), 512–519.
7. Alexeyeva, L.A. (2017). Singular boundary integral equations of boundary value problems of the elasticity theory under supersonic transport loads. *Differential Equations*, 53(3), 317–332.
8. Alexeyeva, L.A., & Kayshibayeva, G.K. (2016). Transport solutions of the Lamé equations and shock elastic waves. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 56(7), 1343–1354.
9. Brezhnev, V.A., Abramson, V.M., Zemelman, A.M., Vlasov, S.N., Koulaguin, N.I., Merkin, V.E., & Razbeguin, V.N. (2005). Russian underwater tunnels in the system of international transportation ways. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 20(6), 595–599.
10. Chattopadhyay, A., & Singh, A.K. (2012). Propagation of magnetoelastic shear waves in an irregular self-reinforced layer. *Journal of Engineering Mathematics*, 75, 139–155.
11. Chattopadhyay, A., Gupta, S., Sahu, S.A., & Singh, A.K. (2011). Dispersion equation of magnetoelastic shear waves in an irregular monoclinic layer. *Applied Mathematics and Mechanics*, 32, 571–586.
12. Egger, P. (2000). Design and construction aspects of deep tunnels. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 15(4), 403–408.
13. Hoop, A.T.D. (2002). The moving-load problem in soil dynamics — the vertical displacement approximation. *Wave Motion*, 36, 1–12.
14. Mors, F.M., & Feshbakh, G. (2013). *Metody teoreticheskoy fiziki (Tom 1) [Methods of theoretical physics (Vol. 1)]*. Ripol Klassik.
15. Petrovskiy, I.S. (1961). *Leksii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations]*. Fizmatgiz.
16. Sheng, X., Jones, C.J.C., & Petyt, M. (1999). Ground vibration generated by a load moving along a railway track. *Journal of Sound and Vibration*, 228, 129–156.
17. Ukrainets, V.N. (2006). *Dinamika tonneley i truboprovodov melkogo zalozheniya pod vozdeystviem podviznykh nagruzok [Dynamics of tunnels and shallow pipelines under moving loads]*. NITs PGU im. S. Toraygyrova.
18. Vladimirov, V.S. (1978). *Obobshchyonnye funktsii v matematicheskoy fizike [Generalized functions in mathematical physics]*. Nauka.

Сведения об авторах:

Алексеева Людмила Алексеевна (автор для корреспонденции) – доктор физико-математических наук, профессор, ГНС Отдела математической физики и моделирования Института математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан, e-mail: alexeeva@math.kz).

Information about the authors:

Lyudmila Alexeyeva Alexeyevna (corresponding author) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Physics and Modeling at the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan, e-mail: alexeeva@math.kz).

Авторлар туралы мәлімет:

Алексеева Людмила Алексеевна (корреспонденттік автор) – физика-математика ғылымдарының докторы, профессор, Математика және математикалық модельдеу институтының математикалық физика және модельдеу бөлімінің жетекші ғылыми қызметкері (Алматы, Қазақстан, e-mail: alexeeva@math.kz).

Отправлено: 8.07.2025

Принято: 15.03.2026