

FTAMP 29.05.23; 29.05.29; 29.05.41

\*Зазулин Д.М.<sup>1,2</sup> , Кемелжанова С.Е.<sup>1</sup> , Эзау П.Д.<sup>3</sup> <sup>1</sup> *ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Қазақстан, Алматы*<sup>2</sup> *Ядролық Физика институты, Қазақстан, Алматы*<sup>3</sup> *Петербург ядролық физика институты, Россия*

## ГОЛОГРАФИЯЛЫҚ ЕКІ ЖАҚТЫЛЫҚ ӘДІСПЕН СИПАТТАЛҒАН НӨЛДІК ДЫБЫСЫ БАР ЖҮЙЕГЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕРМОДИНАМИКАНЫ ҚОЛДАНУ

**Аннотация.** Термодинамика геометриясы әдісі аясында бұл жұмыста голографиялық дуальдік әдіспен болжанған нөлдік дыбысы бар жүйенің тепе-теңдік күйдегі алуан түрлілігінің қасиеттері зерттелді. Лежандр түрлендірулеріне қатысты инвариантты нәтижелер термодинамикалық потенциалды таңдауға тәуелсіз есептелінді. Осы қарастырылып отырған жүйе үшін тиісті метрикалар мен скалярлы қисықтар есептелініп, қасиеттері сипатталды. Голографиялық тәсіл көмегімен жұмыста кванттық сұйықтықтың жаңа түрі табылып, сұйықтықтың жылу сыйымдылығы төмен температурада қарастырылды. Термодинамикалық потенциал ретінде температура мен бариондық тығыздыққа байланысты энтропия алынып және де 3-өлшемді графиктер тұрғызылды. График арқылы ондағы термодинамикалық айнымалы скаляр қисықтары шексіздікке немесе нөлге ұмтылады, бұл дегеніміз мүмкін болатын фазалық ауысуларды және сәйкесінше кванттық әсермен өзара ірекеттесудің мүмкін болатындығын көрсетеді. Бұл жағдайда метриканың екі нұсқасы да нөлдік дыбысы бар қаралған голографиялық жүйеде ықтимал фазалық ауысулар сызықтарының орналасуы туралы бірдей қорытындыға әкелетіндігі көрсетілген.

**Түйін сөздер:** геометротермодинамика, Лежандр түрлендірулері, метрикалық тензор, скаляр өрісінің қисықтығы, голографиялық екі жақтылық, нөлдік дыбыс.

### Кіріспе

Голографиялық дуальдік әдісте кванттық жүйелер табиғаттағы белгілі төрт әсерлесудің ішінде күшті әсерлесуде байқалады[1]. Голографиялық модельдер эксперименталды мәліметтермен жақсы үйлесетін бірқатар болжамдарға әкеледі. Сонымен қатар голографиялық әдістің көмегімен кванттық жүйелердің жаңа түрлері болжанады. Мысалы, [2] жұмыста төмен температураларда Ферми сұйықтық сияқты нөлдік дыбыс бар жүйе анықталған, бірақ бұл жүйеде жылу сыйымдылығының мүлдем басқа температуралық тәуелділігі бар. Сондықтан зерттеудің өзекті міндеті болып жаңа кванттық жүйелердің термодинамикалық қасиеттерін голографиялық екі жақтылық әдісімен қарастыру болып табылады. Осы жұмыста нөлдік дыбысы бар голографиялық жүйенің термодинамикалық қасиеттеріне зерттеу жүргізілді. Зерттеу әдісі ретінде термодинамика геометриясы қолданылды [3], ал термодинамикалық потенциал

ретінде - бариондардың температурасы мен тығыздығына байланысты энтропия қолданылды.

### Геометротермодинамика

Лежандр түрленулеріне қатысты инвариантты болатын тепе-теңдіктің көптүрлілігінің қисықтығының көмегімен Э. Кеведо ұсынған[3] геометротермодинамикада термодинамикалық жүйелердегі өзара әрекеттесулер есептелінеді. Термодинамикада да жүйенің физикалық қасиеттері жүйе сипатталатын термодинамикалық потенциалдарды таңдауға байланысты емес. Термодинамикалық потенциалдардың бір жиынтығынан екіншісіне өту Лежандрдің түрлендірулері арқылы жүзеге асырылады және бұл мағынада термодинамика Лежандрдың өзгерулеріне қатысты инвариантты болады. ГТД-да, мысалы, [3] көрсетілгеніндей, көптүрліліктің нөлдік қисықтығына қатысты идеалды газда бөлшектер бір-

бірімен әрекеттеспейді. Бұл жағдайда ГТД фазалық ауысулар өтетін нүктелерге жақын жүйенің әрекетін қалпына келтіреді. Тепе-теңдіктің көптүрлілігіне қатысты скалярлық өрістің қисықтығы фазалық ауысуларға жақын жерде шексіздікке ұмтылады, яғни бұл жағдай әртүрлі кара құрдымдарда, Бозе-Эйнштейн, Ван-дер-Ваальс газдарының және басқа да физикалық құбылыстарда[4], көрсетілген. Бұл факт аз зерттелген термодинамикалық жүйелерде белгісіз фазалық ауысуларды іздеуге ыңғайлы. Осы жұмыста термодинамикалық жүйелерді зерттеу үшін біз тиісті тепе-теңдіктің алуан түрлілігінің метрикалық тензорларын, метрикалық тензорлардың детерминанттарын және сәйкес скалярлы өрістің қисықтарын есептейміз. Метриканы және метрикалық тензорларды есептеу үшін төмендегі формуланы пайдаландық[3]:

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \delta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c \quad (1)$$

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \eta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c \quad (2)$$

$l^2$  - термодинамикалық ұзындық квадраты,  $\Phi \equiv \Phi(E^a)$  – термодинамикалық потенциал,  $E^a$  -термодинамикалық потенциалға тәуелді, (a=1, ..., n), n – термодинамикалық потенциалдар саны,  $\Phi$ ,  $\delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$  және  $\eta_{a,b} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$  тәуелді. Екі формулада (1) және (2) Лежандр түрленулеріне[3] қатысты инвариантты.

Қисықтың тензоры қарапайым өрнекпен өрнектеледі:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial E^b \partial E^c} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial E^a \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial E^b \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial E^a \partial E^c} \right) + g_{np} \left( \Gamma_{bc}^n \Gamma_{ad}^p - \Gamma_{bd}^n \Gamma_{ac}^p \right) \quad (3)$$

мұндағы  $g^{nm}(g_{ad})$  – метрикалық тензор,

$\Gamma_{bc}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left( \frac{\partial g_{mb}}{\partial E^c} + \frac{\partial g_{mc}}{\partial E^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial E^m} \right)$  – Кристоффел символы. Ары қарай скалярлық

қисықтық мына формуламен есептелінеді  $R = g^{ac} g^{bd} R_{abcd}$ .

Одан әрі біз тек екі термодинамикалық потенциалға тәуелді жүйелермен жұмыс істейміз, онда скаляр өрісінің қисығы үшін өрнек оңайлатылады:

$$R = \frac{2P_{1212}}{\det(g)}, \quad (4)$$

мұндағы  $\det(g)$  – екі өлшемді метрикалық тензордың детерминанты.

### Голографиялық сипаттама бойынша нөлдік дыбыс жүйесі

Голографиялық тәсіл көмегімен жұмыста[2] кванттық сұйықтықтың жаңа түрі табылды. Бұл жұмыста сұйықтықтың жылу сыйымдылығы төмен температураларда  $\sim T^6$  температурасына байланысты тәуелді. Ферми-сұйықтарға тән емес жылу сыйымдылығының болуына қарамастан, жүйенің төмен температураларда нөлдік дыбыс модалары бар. Осы сұйықтың энтропиясы үшін  $Td^{-\frac{1}{p}} \ll 1$  жуықтаулар [2] жұмыста көрсетілген.  $Td^{-\frac{1}{p}} \ll 1$  жуықтау үшін энтропия:

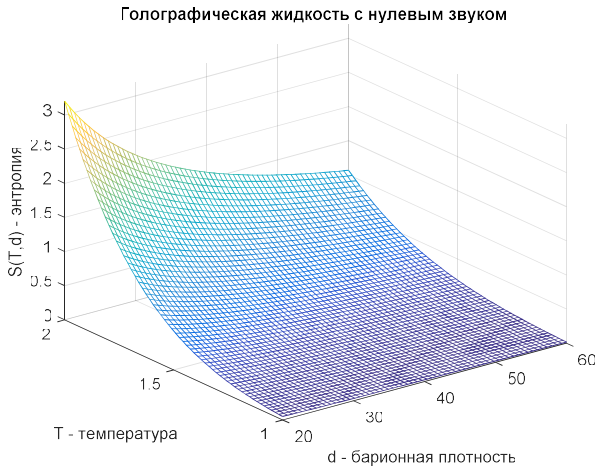
$$S(T, d) = S_0 + N_q \left( \frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1} \left( \frac{T^{2p}}{2d} \right) \quad (5)$$

мұндағы T – температура, d – бариондық тығыздық, p – қарастырылып отырған сұйықтықтағы кеңістіктің өлшемділігі (біз 3 өлшемді кеңістікті қарастырамыз),  $S_0$  - нөлдік температурадағы энтропия және  $N_q$  - бірнеше тұрақтылар. (5) –ші формула  $\frac{N_q}{2} \left( \frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1} \equiv 1$  үшін 1-ші суреттегі кескін алынды, бұл кескінде T және d параметрлерінің бірнеше диапазоны.

(1)–ші метрика үшін (5) –ші формуланы қолдана отырып,

$\frac{N_q}{2} \left( \frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1}$  бірлік үшін метрикалық тензорды аламыз:

$$g(T, d) = \begin{bmatrix} \frac{180T^{10}}{d^2} & -\frac{15T^{11}}{d^3} \\ -\frac{15T^{11}}{d^3} & -\frac{2T^{12}}{d^4} \end{bmatrix} \quad (6)$$



1 – сурет. Нөлдік дыбыстағы голографиялық жүйе[2] үшін температура мен бариондық тығыздыққа тәуелді энтропия (5)

Ары қарай осы тензордың детерминантын есептейміз:

$$\det(g) = -\frac{585T^{22}}{d^6} \quad (7)$$

және скаляр өрістің қисықтығын есептейміз (4):

$$R = -\frac{985d^2}{135T^{12}} \quad (8)$$

(5)-ші өрнекті (2)-ші формулаға қолдана отырып, және бірлік ретінде

$\frac{N_q}{2} \left( \frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1}$  пайдаланып метрикалық

тензорды есептейміз:

$$g(T, d) = \begin{bmatrix} \frac{180T^{10}}{d^2} & -\frac{21T^{11}}{d^3} \\ -\frac{21T^{11}}{d^3} & -\frac{2T^{12}}{d^4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Бұл тензордың детерминанты:

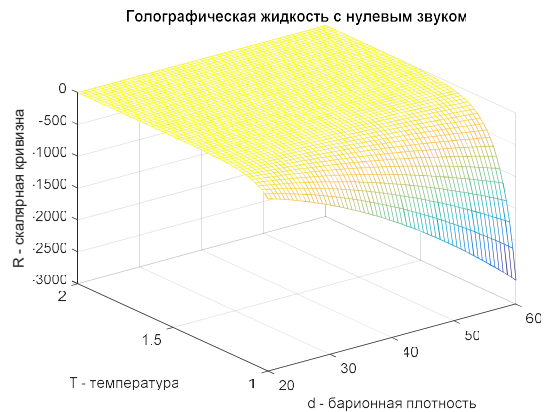
$$\det(g) = -\frac{81T^{22}}{d^6} \quad (10)$$

Скаляр өрістің қисықтығы:

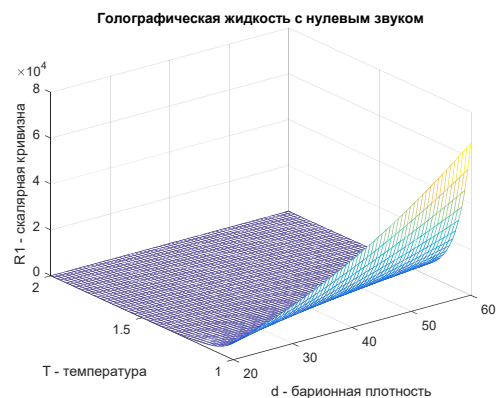
$$R_1 = \frac{398d^2}{216T^{12}} \quad (11)$$

(8) және (11) формулалардан бариондық тығыздықтың ұлғаятындығын

және скалярлық өрістің қисықтығы нөлге ұмтылатын температурада минус пен плюс шексіздікке ұмтылатын жағдайда фазалық ауысулар мүмкін болатындығын көруге болады. Сонымен қатар, скалярлы өрістің қисықтары барионды зарядтың тығыздығының нөлге ұмтылған кезінде және температура ұлғайған кезде нөлге ұмтылады, бұл дегеніміз жүйедегі бөлшектер арасындағы өзара әрекеттесудің әлсіреуін көрсетеді. T және d параметрлерінің кейбір диапазоны үшін алынған нәтижелер 2а және 2б суреттерде көрсетілген. Осы жүйе үшін екі метрика (1) және (2) тиісті қисықтарға арналған сингулярлықтардың орналасуына қатысты бірдей жалпы нәтижеге әкеледі.



а)



ә)

2 сурет – Бариондық тығыздыққа және температураға қатысты скалярлық қисықтың тәуелділігі. а) (1)-ші формула бойынша есептелінген метрика, ә) (2)-ші формула бойынша есептелінген метрика.

### Қорытынды

Осы жұмыста ГТД шеңберінде голографиялық екі жақтылық әдіспен болжанған нөлдік дыбысы бар күшті әсер

ететін кванттық жүйенің тепе-теңдігі қарастырылды, метриканың екі ықтимал варианттары үшін метрикалық тензорлар мен скалярлы қисықтар есептелді.

Термодинамикалық потенциал ретінде температура мен бариондық тығыздыққа байланысты энтропия алынды.

3-өлшемді графиктер алынды, онда термодинамикалық айнымалы скаляр өрістің қисықтары шексіздікке немесе нөлге ұмтылады, бұл мүмкін болатын фазалық ауысуларды және сәйкесінше кванттық әсермен өзара әрекеттесудің мүмкін болатындығын көрсетеді.

Бұл жағдайда екі метрик (1) және (2) нұсқаларының екеуі де нөлдік дыбысы бар қаралған голографиялық жүйеде ықтимал фазалық өтпелер сызықтарының орналасуына қатысты бір жүйеге келтіретіні көрсетілген.

#### Әдебиеттер тізімі

- [1] Maldacena J. The large N limit of super conformal field theories and supergravity //Adv.Theor. Math. Phys. – 1998. – С. 231–252.
- [2] Karch A., Son D.T., and Starinets A.O. Zero sound from holography //Phys. Rev. Lett. –2009. – Vol.102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.051602>
- [3] Karch A., O'Bannon A. Holographic thermodynamics at finite baryon density: some exact results //JHEP 0711:074. - 2007. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/11/074>
- [4] Quevedo H. Geometrothermodynamics //J. Math. Phys. – 2007. – Vol. 48, - P.013506. <https://doi.org/10.1063/1.2409524>.
- [5] Quevedo H., Sanchez A., Taj S., Vazquez A., Phase transitions in Geometrothermodynamics//Gen. Rel. Grav. - Vol. 43. -2011. –P.1153. <https://doi.org/10.1007/s10714-010-0996-2>
- [6] Engelhardt N and Horowitz G.T. Recovering the spacetime metric from a holographic dual //Adv. Theoretical Math. Phys. -2017. –Vol. 21. No.7. –P.1635-1653.
- [7] Czech B., Lamprou L., McCandlish S. and Sully J. Integral geometry and holography //J. High energy Phys. –2015. –No.175. –P. 7-33.
- [8] Bhattacharya J., Veronika E. Hubeny,

Mukund Rangamani, Tadashi Takayanagi. Entanglement density and gravitational thermodynamics //Phys. Rev. D -2015. –Vol.91. -P.106009.

[9] Quevedo H., Sasha A., Zaldivar. A geometrothermodynamic approach to ideal quantum gases and Bose-Einstein condensates // J. General Relativity and Quantum Cosmology. -2015. arXiv:1512.08755v3

[10] Mansoori, Seyed Ali Hosseini et.al. Extrinsic and intrinsic curvatures in thermodynamic geometry // Phys. Rev. B759. -2016. -P.298-305.

[11] Ming Zhang, Xin-Yang Wang, Wen-Biao Liu. Extrinsic curvature in geometrothermodynamics //Physics Letters B. –2018. -Vol.783. –P.169-174.

[12] Ming Zhang Corrected thermodynamics and geometrothermodynamics for anti-de Sitter black hole //Nuclear Physics B. –2018. - Vol.935. –P.170-182.

[13] Andreas Karch, Andy O'Bannon Holographic Thermodynamics at Finite Baryon Density: Some Exact Results //J. High Energy Physics. -2007. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/11/074>

[14] Yunseok S., Sang-Jin Sin, Jonathan Shock, Dimitrios Zoakos Holographic hadrons in a confining finite density medium //Journal of High Energy Physics. -2010. – Vol.3. –P.115. [https://doi.org/10.1007/JHEP03\(2010\)115](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2010)115)

[15] Xun Chen, Danning Li, Mei Huang Criticality of QCD in a holographic QCD model with critical end point //Chinese Physics C. -2019. –Vol.43. –No 2. –P.023105.

[16] Alsup, James et.al. Duality between zeroes and poles in holographic systems with massless fermions and a dipole coupling //Phys. Rev. D90. -2014. –No.12. –P.126013.

[17] Pineda V., Quevedo H., Maria N. Quevedo, Sanchez A., Valdes E. The physical significance of geometrothermodynamic metrics //J. of Geometric Methods in Modern Physics. -2019. –Vol.16. –No. 11. – P.1950168. <https://doi.org/10.1142/S0219887819501688>.

[18] Quevedo H., Nettel F., Bravetti A. Representation invariant Geometrothermodynamics: applications to ordinary thermodynamic systems //J. of Geom. and Physics. -2014. –Vol.81. –P.1-9.

[19] Maria N. Quevedo, Quevedo H. Geometrothermodynamics of the cosmological constant //International Journal of Management and Applied Science. -2017. –Vol.3. –P.21-24.

[20] Nikola I. Gushterov, Andy O'Bannon, Ronnie Rodgers Holographic zero sound from

Spacetime – filling branes //J. of High Energy Physics. -2018. –No.76. [https://doi.org/10.1007/JHEP10\(2018\)076](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2018)076).

11.04.2020 басылымға қабылданды

\*Зазулин Д.М.<sup>1,2</sup> , Кемелжанова С.Е.<sup>1</sup> , Эзау П.Д.<sup>3</sup> 

<sup>1</sup> ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Қазақстан, Алматы

<sup>2</sup> Ядролық Физика институты, Қазақстан, Алматы

<sup>3</sup> Петербург ядролық физика институты, Россия

### Голографиялық екі жақтылық әдіспен сипатталған нөлдік дыбысы бар жүйеге геометриялық термодинамиканы қолдану

**Аннотация.** Термодинамика геометриясы әдісі аясында бұл жұмыста голографиялық дуальдік әдіспен болжанған нөлдік дыбысы бар жүйенің тепе-теңдік күйдегі алуан түрлілігінің қасиеттері зерттелді. Лежандр түрлендірулеріне қатысты инвариантты нәтижелер термодинамикалық потенциалды таңдауға тәуелсіз есептелінді. Осы қарастырылып отырған жүйе үшін тиісті метрикалар мен скалярлы қисықтар есептелініп, қасиеттері сипатталды. Голографиялық тәсіл көмегімен жұмыста кванттық сұйықтықтың жаңа түрі табылып, сұйықтықтың жылу сыйымдылығы төмен температурада қарастырылды. Термодинамикалық потенциал ретінде температура мен бариондық тығыздыққа байланысты энтропия алынып және де 3-өлшемді графиктер тұрғызылды. График арқылы ондағы термодинамикалық айнымалы скаляр қисықтары шексіздікке немесе нөлге ұмтылады, бұл дегеніміз мүмкін болатын фазалық ауысуларды және сәйкесінше кванттық эсермен өзара ірекеттесудің мүмкін болатындығын көрсетеді. Бұл жағдайда метрианың екі нұсқасы да нөлдік дыбысы бар қаралған голографиялық жүйеде ықтимал фазалық ауысулар сызықтарының орналасуы туралы бірдей қорытындыға әкелетіндігі көрсетілген.

**Түйін сөздер:** геометротермодинамика, Лежандр түрлендірулері, метрикалық тензор, скаляр өрісінің қисықтығы, голографиялық екі жақтылық, нөлдік дыбыс.

\* Д.М. Зазулин<sup>1,2</sup>, С.Е. Кемелжанова<sup>1</sup>, П.Д. Эзау<sup>3</sup>

<sup>1</sup> КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Қазақстан;

<sup>2</sup> Институт Ядерной Физики, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup> Петербургский Институт Ядерной Физики, Россия

### Применение геометротермодинамики к системе с нулевым звуком описанной методом голографических дуальностей

**Аннотация.** В рамках метода геометротермодинамики в настоящей работе исследованы свойства равновесного многообразия системы с нулевым звуком, предсказанной методом голографических дуальностей. Получены результаты инвариантные относительно преобразований Лежандра, т.е. независимые от выбора термодинамического потенциала. Для рассматриваемой системы рассчитаны соответствующие метрики и скалярные кривизны, а также описаны их свойства. С помощью голографического подхода в работе был обнаружен новый тип квантовой жидкости. Теплоемкость, полученной в этой работе жидкости, при низких температурах зависит от температуры  $\sim T^6$ . В качестве термодинамического потен-

циала бралась энтропия, зависящая от температуры и барионной плотности. Получены 3-мерные графики, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно. Показано, что оба варианта метрик в данном случае приводят к одному и тому же выводу относительно расположения линий возможных фазовых переходов в рассмотренной голографической системе с нулевым звуком.

**Ключевые слова:** геометротермодинамика, преобразования Лежандра, метрический тензор, скалярная кривизна, голографические дуальности, нулевой звук.

**D.M. Zazulin<sup>1,2</sup>, S.E. Kemelzhanova<sup>1</sup>, P.D. Ezau<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;*

<sup>2</sup>*Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan*

<sup>3</sup>*Petersburg Institute of Nuclear Physics, Russia*

### **Application of geometrothermodynamics to the system with zero sound described by the method of holographic duality**

**Abstract.** In the framework of the method of geometrothermodynamics, in present work, we studied the properties of equilibrium manifold of the system with zero-sound predicted by the holographic duality method. The results are invariant under the Legendre transformations, i.e. independent of the choice of thermodynamic potential. For the systems under consideration, the corresponding metrics, determinants of metrics and scalar curvatures are calculated, and their properties are also described. Using the holographic approach, a new type of quantum liquid was discovered. The heat capacity of the liquid obtained in this work at low temperatures depends on the temperature  $\sim T^6$ . Entropy, which depends on temperature and baryon density, was taken as the thermodynamic potential. 3-dimensional obtained that clearly show at which values of thermodynamic variables scalar curvatures tend to infinity or to zero, which indicates possible phase transitions and possible compensation of interactions by quantum effects, respectively. It is shown that both variants of metrics in this case lead to the same conclusion regarding the location of possible phase transition lines in the considered holographic system with zero sound.

**Keywords:** geometrothermodynamics, Legendre transformations, metric tensor, scalar curvature, holographic duality, zero sound..