МРНТИ 50.00.01 https://doi.org/10.26577/JPEOS.2024.v26.i1-i6

Л.А. Алексеева , Г.Н. Азиз*

Институт математики и математического моделирования РК, г. Алматы, Казахстан
*e-mail: azizgulfariza@gmail.com

ТРАНСПОРТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В БИКВАТЕРНИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРИ ДОСВЕТОВЫХ СКОРОСТЯХ

Среди действующих источников излучения электромагнитных волн наиболее распространенными являются подвижные, расположенные на платформах различных транспортных средств. Очевидно, что скорость движения существенно влияет на процессы распространения волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы.

Здесь строятся и исследуются транспортные решения бикватернионного волнового уравнения, которое является бикватернионным обобщением уравнений Максвелла. Данные уравнения описывают электромагнитные поля излучателей электромагнитных (ЭМ) волн и электро-гравимагнитных волн (ЭГМ), движущихся в фиксированном направлении с постоянной скоростью, которая меньше скорости распространения волн в электромагнитной среде (световой скорости). Построены фундаментальные и обобщенные транспортные решения, которые описывают ЭМ поля движущихся обьектов во всем диапазоне скоростей, от досветовых, до сверхсветовых. С использованием преобразования Фурье обобщенных функций, построена бикватернионная функция (бифункция) Грина в подвижной системе координат, которая описывает ЭМ поле, порождаемое подвижным точечным излучателем на оси Z. Определены плотность энергии и вектор Пойнтинга этого поля. Исследовано влияние скорости движения на полевые характеристики.

Ключевые слова: Бикватернион, биградиент, уравнения Максвелла.

L.A. Alexeyeva, **G.N. Aziz***

Institute of Mathematics and mathematical modelling , Almaty, Kazakhstan
*e-mail: azizgulfariza@gmail.com

Transport solutions o Maxwell equations at sub-light speeds in biquaternion representation

The most common movable radiation sources of electromagnetic waves among the operating ones located on the platforms of various vehicles. It is obvious that the speed of movement affects the processes of wave propagation in an environment with such electrical conductivity and magnetic permeability, as does the shape of the source itself and the nature of its operation.

In this work are constructed and studied transport solutions of the biquaternion wave equation, which is a biquaternion generalization of Maxwell's equations. These equations describe the electromagnetic fields of emitters of electromagnetic (EM) waves and electro-gravimagnetic waves (EGM), moving in a fixed direction with a constant speed, which is less than the speed of propagation of waves in an electromagnetic medium (the speed of light). Fundamental and generalized transport solutions have constructed that describe the EM fields of moving objects in the entire range of speeds, from light to superluminal.The electromagnetic field generated by a moving point emitter on the Z-axis described by the biquaternion Green's function (bifunction) in a moving coordinate system constructed using the Fourier transform of generalized functions. The energy density and Poynting vector of this field were determined. Influence of movement speed researched on field characteristics.

Keywords: Biquaternion, bigradient, Maxwell's equations.

Л.А. Алексеева, Г.Н. Азиз*
Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
*e-mail: azizgulfariza@gmail.com

Бикватерниондық көрінісі арқылы жарықалды жылдамдықта жасалған Максвелл теңдеулерінің тасымалдау шешімдері

Әртүрлі көліктердің платформаларында орналасқан жылжымалы электромагниттік толқындық сәулелену көздері қолданыстағы электромагниттік толқындық сәулелену көздерінің ішінде ең көп таралады. Дереккөздің өзіндік формасы мен оның жұмысының сипаты, сондай-ақ қозғалыс жылдамдығы әртүрлі электр өткізгіштігі мен магниттік өткізгіштігі бар ортада толқынның таралу процестеріне айтарлықтай әсер ететіні анық.

Мұнда Максвелл теңдеулерінің бикватерниондық жалпылауы болып табылатын бикватерниондық толқын теңдеуінің тасымалдау шешімдері құрастырылған және зерттелген. Бұл теңдеулер электромагниттік (ЭМ) ортадағы толқындардың таралу жылдамдығынан аз болатын тұрақты жылдамдықпен (жарық жылдамдығы) бекітілген бағытта қозғалатын ЭМ толқындар және электро-гравимагниттік толқындар (ЭГМ) ЭМ өрістерде таралуын сипаттайды. Жарықтан жоғарыдан бастап, жарыққа дейінгі барлық жылдамдық диапазонында қозғалатын объектілердің ЭМ өрістерін сипаттайтын негізгі және жалпылама тасымалдау шешімдері жасалды. Фурье жалпыланған функцияларының түрлендіруін пайдалана отырып, ЭМ өрісін сипаттайтын Z осінде қозғалатын нүктелік сәулеленуі арқылы жасалатын бикватернион Грин функциясы (бифункция) қозғалатын координаттар жүйесінде тұрғызылды. Өрістің энергия тығыздығы және Пойнтинг векторы анықталған. Қозғалыс жылдамдығы өріс сипаттамаларына әсері зерттелді.

Түйін сөздер: Бикватернион, биградиент, Максвелл теңдеулері.

Введение

Уравнения Максвелла являются основополагающими в современной электродинамике и являются определяющими при изучении электромагнитных полей, порождаемых разнообразными излучателями ЭМ волн. Построением и исследованием решений этих уравнений и краевых задач для них в областях разной геометрии занимаются многие ученые, начиная со второй половины XIX века. Библиография в этом направлении весьма обширная, начиная с многообразной учебной литературы по электромагнетизму [1-5] и др.

Особенности системы уравнений Максвелла, состоящей из двух дифференциальных векторных уравнений для напряженности электрического поля и двух скалярных уравнений для электрического и магнитного зарядов (всего 8 уравнений) позволяют ее комплексифицировать и записать в виде одного векторного уравнения для напряженностей ЭМ поля и одного скалярного уравнения для зарядов (всего 4 уравнения). Такая форма была предложена еще Гамильтоном, но им не опубликована. Ее фундаментальные и обобщенные решения были построены в [6]. А особенности этой формы дают записать эти уравнения в виде одного уравнения в дифференциальной алгебре кватернионов, что отмечено рядом авторов [7-14].

В работах [15,16] построены фундаментальные и обобщенные решения бикватернионного волнового уравнения, которое является бикватернионным обобщением уравнений Максвелла. Даны регулярные интегральные представления электрической и магнитной напряженности ЭМ поля при нестационарных токах и зарядах и стационарных периодических по времени.

Среди действующих источников излучения ЭМ волн наиболее распространенными являются подвижные, расположенные на платформах различных транспортных средств. Очевидно, что скорость движения существенно влияет на процессы распространения ЭМ волн в средах с различной электрической проводимостью и магнитной проницаемостью, как и форма самого источника и характер его работы. Исследования в этом направлении не столь многочисленны и связаны с определенным видом источника излучения [15-21].

В любой среде волны распространяются с определенной скоростью. В механике сплошных сред их называют звуковыми, которое пришло из акустики. В сплошных средах скорость распространения волн зависит от типа деформации среды, которую они распространяют. Поэтому в сплошной среде может быть несколько звуковых скоростей. А в анизотропных средах они еще зависят от направления. Отношение скорости движения источника возмущения в среде v к скорости звука называется числом Маха (v/c=M). При M<1 движение дозвуковое, при M>1 сверхзвуковое. Хорошо известны особенности акустических волн при движении самолетов при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях. При математическом моделировании таких транспортных задач тип дифференциальных уравнений меняется: эллиптический при дозвуке и гиперболический при сверхзвуке. Что сильно влияет на решение задачи и кардинально меняет картину волнового поля в среде.

В изотропных электромагнитных средах, которые описываются уравнениями Максвелла (УМ), скорость распространения ЭМ волн одна, и ее принято называть скоростью света. Она является критической, точно так же, как является критической скорость звука в воздухе. Поэтому можно рассматривать досветовой режим движения, световой и сверхсветовой. В этой статье мы рассматриваем досветовой диапазон движения источника излучения.

Здесь строятся и исследуются транспортные решения бикватернионного представления уравнений Максвелла, которые описывают электромагнитные поля излучателей ЭМ волн, движущихся в определенном направлении с постоянной скоростью v. Построены фундаментальные и обобщенные транспортные решения, которые описывают ЭМ поля движущихся объектов при скоростях движения меньше, чем скорость распространения ЭМ в среде. Здесь рассмотрены досветовые транспортные решения при M <1 и исследованы их особенности.

Методы

1. Алгебра бикватернионов. Поскольку алгебра бикватернионов не очень известна, дадим вначале несколько определений.

Пространство бикватернионов $\mathbb{B}=\{\mathbf{F}=f+F\}$ – это пространство гиперкомплексных чисел, где f – комплексное число, F – трехмерный вектор с комплексными компонентами: $F=F_1e_1+F_2e_2+F_3e_3$, e_1,e_2,e_3 – орты декартовой системы координат в R^3, $e_0=1$. Это линейное пространство со сложением (+): для $\forall a,b$ - комплексных чисел

$$a\mathbf{F}+b\mathbf{G}=a(f+F)+b(g+G)=$$
$$=(af+bg)+(aF+bG),$$

и с известной операцией кватернионного умножения ($\circ$):

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\circ\mathbf{G}&=(f+F)\circ(g+G)=\\&=(fg-(F,G))+(fG+gF+[F,G])\end{aligned}\quad(1)$$

Здесь и далее $(F,G)=\sum_{j=1}^{3}F_jG_j$ - скалярное произведение F и G, $[F,G]=\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{jkl}F_jG_ke_l$ – их векторное произведение, ε_{jkl} - псевдотензор Леви-Чивита, δ_{jk} – символ Кронекера. Алгебра бикватернионов некоммутативна, поскольку

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}-\mathbf{G}\circ\mathbf{F}=2[G,F]\qquad(2),$$

но ассоциативна:

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\circ\mathbf{H}=(\mathbf{F}\circ\mathbf{G})\circ\mathrm{H}=\mathbf{F}\circ(\mathbf{G}\circ\mathbf{H})\quad(3)$$

В [1] подробно рассмотрены свойства бикватернионов и даны ряд определений. Перечислим некоторые из них.

Бикватернионы коммутируют, т.е. $\mathbf{F}\circ\mathbf{G}=\mathbf{G}\circ\mathbf{F}$, только если их векторные части параллельны: $G\,||\,F$, – либо хотя бы одна из них равна нулю (один из них –скаляр).

Определение 1. *Скалярным произведением* бикватернионов $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию:

$$(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)=f_1f_2+(F_1,F_2).$$

Определение 2. *Нормой* бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\|=\sqrt{(\mathbf{F},\overline{\mathbf{F}})}=\sqrt{f\cdot\overline{f}+(F,\overline{F})}=\sqrt{|f|^2+\|F\|^2}$$

.

Определение 3. *Псевдонормой* бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем величину

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \sqrt{f \cdot \bar{f} - (F, \bar{F})} = \sqrt{|f|^2 - \|F\|^2} \qquad (4)$$

2. Биградиенты и биволновые уравнения. Введем функциональное пространство бикватернионов $\mathbb{B}(\mathbb{M}) = \{\mathbf{F}(\tau, x) = f(\tau, x) + F(\tau, x)\}$, где f – комплекснозначные функции на пространстве Минковского $\mathbb{M} = \{(\tau = ct, x), \tau \in R^1, x \in R^3\}$, а F – трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами ($F = F_1 + iF_2$), f и F из класса обобщенных функций медленного роста [16].

Определение 3. *Взаимные биградиенты* – это дифференциальные бикватернионные операторы вида: $\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla$, $\nabla^- = \partial_\tau - i\nabla$, где $\nabla = \text{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Их действие на $\mathbb{B}(\mathbb{M})$ определено согласно правилу умножения в алгебре кватернионов:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{F} = (\partial_\tau \pm i\nabla) \circ (f + F) =$$
$$(\partial_\tau f \mp i(\nabla, F) \pm i\nabla f \pm \partial_\tau F \pm i[\nabla, F].$$

Здесь $(\nabla, F) = \operatorname{div} F, \quad [\nabla, F] = \operatorname{rot} F$ (везде в двойных знаках подразумеваются знаки верхние либо нижние).

Их суперпозиция обладает замечательным свойством, которое легко доказать.

Лемма 1. $\nabla^-\left(\nabla^+\mathbf{F}\right) = \nabla^+\left(\nabla^-\mathbf{F}\right) = \left(\nabla^- \circ \nabla^+\right)\mathbf{F} = \Box\mathbf{F}$,

где $\Box$ *- волновой оператор* (даламбертиан*):*

$\Box = \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \Delta$, Δ – *оператор Лапласа* (лапласиан).

Используя ее легко решать дифференциальные уравнения вида:

$$\nabla^{\pm}\mathbf{A} = \mathbf{\Theta}(\tau, x) \qquad (5)$$

которые называем *биволновыми.* Его решения и свойства инвариантности относительно преобразований Лоренца подробно рассмотрены в [17].

В работах [12, 15] показано, что это уравнение является бикватернионным обобщением уравнений Максвелла, если

$$\mathbf{A} = \alpha + \sqrt{\varepsilon}E + i\sqrt{\mu}H, \mathbf{\Theta}(\tau, x) = = -\left(\frac{j^E}{\sqrt{\varepsilon}} + i\frac{j^H}{\sqrt{\mu}}\right) \qquad (6)$$

Здесь E, H – вектора электрической и магнитной напряженности ЭМ поля, j^E, j^H – плотности электрических и магнитных токов, ε, μ – электрическая проводимость и магнитная проницаемость среды, $c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ – скорость света в среде. При $\alpha = 0, j^H = 0$ уравнение (6) эквивалентно системе уравнений Максвелла.

Здесь рассмотрим транспортные решения биволнового уравнения (6) без наложения этих ограничений.

3. Транспортное биволновое уравнение Максвелла и его общее решение. Рассмотрим случай, когда правая часть (5) имеет вид:

$$\mathbf{\Theta}(\tau, x) = \mathbf{F}(x_1, x_2, z), \qquad z = x_3 - \text{M}\tau \qquad (7)$$

Здесь бикватернион $\mathbf{F}(x, z)$ описывает движение излучателя в направлении оси X_3 со скоростью v=*Mc*. Возможны три случая: *досветовой* $M < 1 \Leftrightarrow V < c$, *световой* $M = 1 \Leftrightarrow V = c$, *сверхсветовой* $M > 1 \Leftrightarrow V > c$ >1, которые меняют тип уравнения (6) и вид его решения.

Введем подвижную систему координат (x_1, x_2, z) и решение (5) будем строить в аналогичном виде $\mathbf{A} = \mathbf{B}(x, z)$, $x = (x_1, x_2)$, тогда дифференциальные операторы $\partial_\tau = -\text{v}\partial_z$, $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_z)$ и в подвижной системе координат уравнение (5) преобразуется к виду:

$$M_{\mathrm{v}}^{\pm}\mathbf{B} = \mathbf{F}(x,z), M_{\mathrm{v}}^{\pm} \triangleq -M\partial_z \pm i(\partial_1, \partial_2, \partial_z) \text{ , (8)}$$

Будем называть это уравнение *транспортным уравнением Максвелла* (ТУМ).

Простым вычислением доказывается

Лемма 2. *Композиция транспортных операторов Максвелла коммутативна и равна*

$$M_{\mathrm{v}}^{\pm}M_{\mathrm{v}}^{\mp} = -\left\{\Delta_2 + \left(1 - M^2\right)\partial_{zz}\right\},$$

где $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ *- двумерный лапласиан.*

Теорема 1. *Общее решение транспортного уравнения Максвелла можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 - M_{\mathrm{v}}^{\mp} \circ \left(\mathbf{F} * \psi\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{B}^0(x,z)$ *решение однородного уравнения* (8) *(при* $\mathbf{F} = 0$*),* $\psi(x,z)$*- фундаментальное решение транспортного волнового уравнения*:

$$\Delta_2\psi + \mu^2\partial_{zz}\psi + \delta(z)\delta(x) = 0, \tag{10}$$

Здесь $\mu^2 = \left(1 - M^2\right)$.

Доказательство. Подставим его в уравнение (8) и, используя условия теоремы, лемму 2, свойство ассоциативности кватернионного умножения и свойства свертки с дельта-функцией, получим требуемое:

$$\begin{gathered} M_{\mathrm{v}}^{\pm} \circ \left\{\mathbf{B}^0 - M_{\mathrm{v}}^{\mp} \circ \left(\mathbf{F} * \psi\right)\right\} = \\ = M_{\mathrm{v}}^{\mp}\mathbf{B}^0 - M_{\mathrm{v}}^{\pm} \circ M_{\mathrm{v}}^{\mp} \circ \left(\mathbf{F} * \psi\right) = \\ = \left\{\Delta_2 + \mu^2\partial_{zz}\right\}\psi * \mathbf{F} = \delta(z)\delta(x) * \mathbf{F} = \mathbf{F} \end{gathered}$$

Осталось вычислить *скалярный потенциал* $\psi(x,z)$. Вид его зависит от знака $\mu^2 = 1 - \mathrm{v}^2$: *досветовой* M<1 $\Rightarrow \mu^2 > 0$, *световой* M=1 $\Rightarrow \mu^2 = 0$, *сверхсветовой* M>1 $\Rightarrow \mu^2 < 0$

Из (10) следует, что преобразование Фурье по времени $\bar{\psi}(\xi,\zeta)$ функции $\psi(x,z)$ удовлетворяет уравнению:

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\|\xi\|^2 + \mu^2\zeta^2} \tag{11}$$

Далее построим решение транспортного уравнения Максвелла при досветовых скоростях.

4. Досветовые транспортные решения уравнения Максвелла. В досветовом случае для построения оригинала используем фундаментальное решение уравнения Лапласа:

$$\Delta U + \delta(y) = 0, \quad y = (y_1, y_2, y_3) \tag{12}$$

которое, с точностью до решения однородного уравнения, можно представить в виде [16]:

$$U(y) = \frac{1}{4\pi\|y\|}, \tag{13}$$

Обозначим $z' = z / \mu$. Поскольку

$$\begin{gathered} \partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi + \mu^2\partial_z^2\psi + \delta(x,z) = \\ = 0 \Rightarrow \partial_1^2\psi + \partial_2^2\psi + \partial_{z'}^2\psi + \\ + \mu^{-1}\delta(x)\delta(z') = 0, \end{gathered}$$

отсюда и из (13) следует

$$\psi(x,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}}, \ r = \|x\|$$

Теорема 2. *Общее решение транспортного уравнения Максвелла* (8) *при досветовых скоростях движения можно представить в виде*

$$\begin{gathered} \mathbf{B}(x,z) = M_{\mathrm{v}}^{\mp}\left(\mathbf{F} * \psi(x,z)\right) + \\ + M_{\mathrm{v}}^{\mp}\left(\psi_0(x,z) * \mathbf{C}(x,z)\right) \end{gathered} \tag{14}$$

где скалярные потенциалы определяются следующими формулами:

$$\psi(x,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{z^2 + (\mu r)^2}}, \tag{15}$$

$\psi_0(x,z)$ *- решение однородного уравнения*

$$\Delta_2\psi_0 + \mu^2\partial_{zz}\psi_0 = 0, \qquad (16)$$

$\mathbf{C}(x,z)$ *произвольный бикватернион, допускающий свертку с* $\psi_0(x,z)$.

В формуле (14) при дифференцировании следует использовать свойство дифференцирования свертки, которое позволяет переносить дифференцирование на более удобную для этого компоненту свертки с учетом

$$\partial_z\psi = -\frac{z}{4\pi\sqrt{(z^2+(\mu r)^2)^3}},$$

$$\partial_k\psi = -\frac{\mu^2 x_k}{4\pi\sqrt{\left(z^2+(\mu r)^2\right)^3}}, \qquad (17)$$

$$k = 1,2.$$

На рисунке 1 представлен график изменения потенциала $\psi(x,z)$ вдоль оси z в зависимости от чисел Маха.

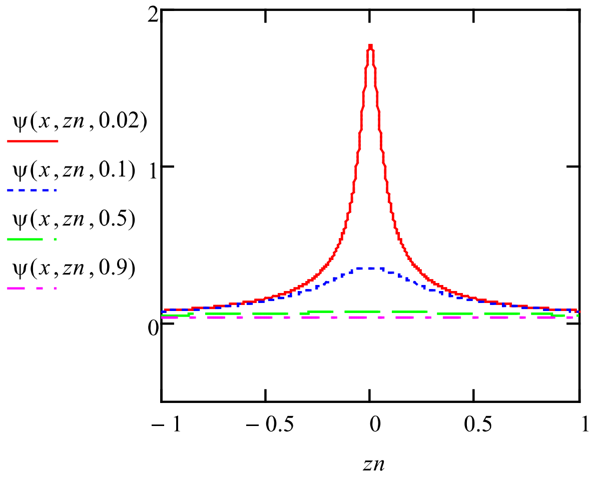

Рисунок 1. Изменение $\psi(x,z)$ вдоль оси Z при фиксированном *x*=(1,1) при разных числах Маха: *M*=0.02, 0.1, 0.5, 0.9.

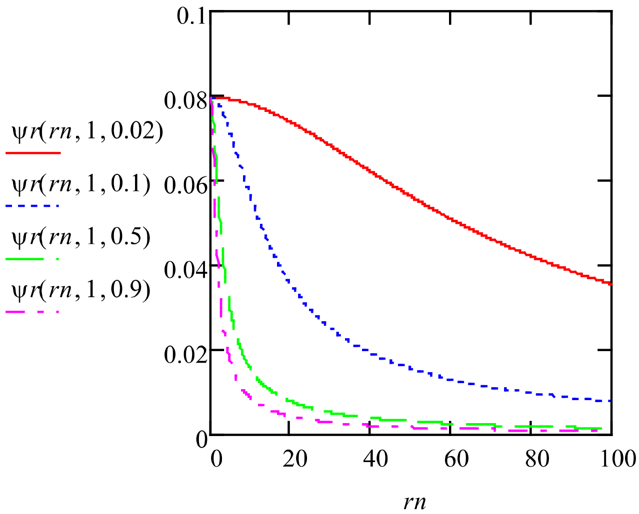

Рисунок 2. Изменение $\psi(x,z)$ вдоль *r* при фиксированном *r*=1 при разных числах Маха: *M*=0.02, 0.1, 0.5, 0.9.

Из (14) следует, что соответствующий скалярный потенциал удовлетворяет уравнению:

$$\Delta_2\psi_0 + \mu^2\partial_{zz}\psi_0 = 0$$

Нетрудно видеть, что это гармоническая функция $\psi_0(y) = \psi_0(x, z/\mu)$

5. Бифункция Грина транспортного уравнения Максвелла

Определение. Бифункцией Грина $\mathbf{U}(x,z)$ при досветовых скоростях движения называется фундаментальное решение уравнения (8):

$$M_{\mathrm{v}}^{\pm}\mathbf{U} = \delta(x,z), \qquad (18)$$

удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности

$$\|\mathbf{U}(x,z)\| \to 0 \quad \text{при} \ \|(x,z)\| \to \infty \qquad (19)$$

Из теоремы 1 следует:

$$\mathbf{U}(x,z) = M_{\mathrm{v}}^{\mp} * \psi(x,z) = (-M\partial_z \mp i\,grad) * \psi =$$

$$= -\frac{\left(Mz \pm i(\mu^2 r,_1, \mu^2 r,_2, z)\right)}{4\pi\sqrt{(z^2 + (\mu r)^2)^3}}$$

Бифункцию Грина удобно использовать при построении решения уравнения (8).

Теорема 3. *Общее решение транпортного биволнового уравнения Максвелла, удовлетворяющее условиям затухания на бесконечности*: $\mathbf{B}(x,z) \to 0, \quad \|(x,z)\| \to \infty$ *,при досветовых скоростях движения имеет вид:*

$$\mathbf{B}(x,z) = \mathbf{U} * \mathbf{F}(x,z) \qquad (20)$$

И решение существует при любых $\mathbf{F}(x,z)$, *допускающих такую свертку*.

Доказательство.

$$M_{\mathrm{v}}^{\pm}\mathbf{B}(x,z) = M_{\mathrm{v}}^{\pm} \circ (\mathbf{U} * \mathbf{F}(x,z)) =$$

$$= \left(M_{\mathrm{v}}^{\pm}\mathbf{U}\right) * \mathbf{F}(x,z) = \delta(x)\delta(z) * \mathbf{F}(x,z) = \mathbf{F}(x,z)$$

Если $\mathbf{F}(x,z)$ – регулярный бикватернион, то формулу (20) можно представить в следующем интегральном виде:

$$\mathbf{B}(x,z) = \mathbf{U} * \mathbf{F}(x,z) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \iint_{R^2} \mathbf{U}(x-y, z-\zeta) \circ \mathbf{F}(y,\zeta) dy_1 dy_2$$

Если $\mathbf{F}(x,z)$ – сингулярный бикватернион: $\mathbf{F}(x,z) = \mathbf{C}(x,z)\delta_S(x,z)$ простой слой на поверхности S, то формулу (20) можно представить в виде поверхностного интеграла

$$\mathbf{B}(x,z) = \mathbf{U} * \mathbf{C}(x,z)\delta_S(x,z) =$$

$$= \int_S \mathbf{U}(x-y, z-\zeta) \circ \mathbf{C}(y,\zeta) dS(y,\zeta)$$

Если $\mathbf{F}(x,z)$ – простой слой на пространственной кривой L: $\mathbf{F}(x,z) = \mathbf{C}(x,z)\delta_L(x,z)$ то формулу (20) можно представить в следующем интегральном виде вдоль кривой L:

$$\mathbf{B}(x,z) = \mathbf{U} * \mathbf{C}(x,z)\delta_L(x,z) =$$

$$= \int_L \mathbf{U}(x-y, z-\zeta) \circ \mathbf{C}(y,\zeta) dL(y,\zeta)$$

Если $\mathbf{F}(x,z)$ существенно сингулярный, например имеет точечный носитель, то свертку в (20) следует брать согласно правилам свертки в пространстве обобщенных функций [16].

5. Плотность энергии и вектор Пойнтинга ЭМ поля. Бикватернион энергии-импульса определяется формулой

$$\mathbf{\Sigma}(x,z) = 0{,}5\mathbf{B}(x,z) \circ \mathbf{B}^*(x,z) =$$

$$= w(x,z) + iP(x,z) =$$

$$= 0{,}5\left\{(b(x,z), \bar{b}(x,z)) + (B(x,z), \bar{B}(x,z))\right\} +$$

$$+0{,}5\left\{\bar{b}(x,z)B(x,z) - b(x,z)\bar{B}(x,z) - \left[B(x,z), \bar{B}(x,z)\right]\right\}.$$

Здесь $w(x,z)$, $P(x,z)$ - плотность энергии и аналог вектора Пойнтинга, который показывает направление ее распространения. Определим бикватернион энергии-импульса ЭМ поля бифункции Грина:

$$\mathbf{U}(x,z)\circ\mathbf{U}^{*}(x,z)=$$
$$=\left(-M\frac{\partial\psi}{\partial z}\pm i\operatorname{grad}\psi\right)\circ\left(-M\frac{\partial\psi}{\partial z}\mp i\operatorname{grad}\psi\right),$$
$$w=0,5\left(M^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\left\|\operatorname{grad}\psi\right\|^2\right),\tag{21}$$
$$P=M\frac{\partial\psi}{\partial z}\operatorname{grad}\psi$$

Используя (17) и (21) получим *плотность энергии:*

$$\frac{1}{2}\left((M^2+1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2\right)=$$
$$=\frac{z^2(M^2+1)+\mu^4r^2}{32\pi^2(z^2+(\mu r)^2)^3}$$

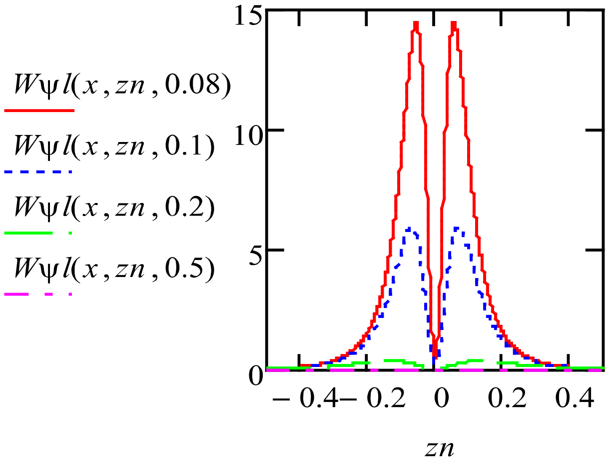

Рисунок 3. Плотность энергии вдоль оси Z при фиксированном $x = (1,1)$ при разных числах Маха: M=0.08, 0.1, 0.2, 0.5.

С ростом скорости движения плотность энергии в среде падает. Видим два максимума плотности позади и впереди движущегося источника плотности, вблизи него по мере удаления от источника плотности энергии быстро затухает.

Вычислим вектор Пойнтинга:

$$P(x,z)=\frac{Mz}{16\pi^2(z^2+(\mu r)^2)^3}\left(\mu^2x_1e_1+\mu^2x_2e_2+ze_3\right),$$

$$\left\|P(x,z)\right\|=\frac{M|z|\sqrt{z^2+\mu^4r^2}}{16\pi^2(z^2+(\mu r)^2)^3}$$

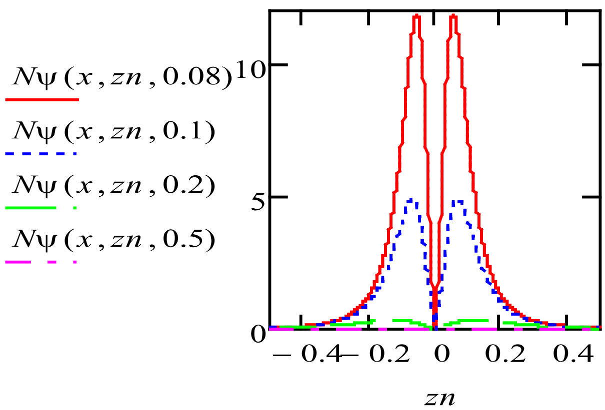

Рисунок 4. Норма вектора Пойнтинга при разных числах Маха: M=0.08, 0.1, 0.2, 0.5.

Его координаты указывают направление распространения энергии. А его норма коррелирует с плотностью энергии имеет подобное же поведение.

Заключение

Отметим, что построенная здесь бифункция Грина необходима для решения транспортных краевых задач электродина-мики в областях, ограниченных цилиндрическими поверхнос-тями, по которым движутся излучатели ЭМ волн в направлении их образующих.

Полученные результаты можно использовать для исследования электро-магнитных полей различных световых излучателей и излучателей радиоволн, расположенных на подвижных объектах (поездах, машинах, кораблях и т.п.).

Финансирование

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета Науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант AP19674789, 2023-2025 гг.).

Литература

1. Максвелл Дж. К.. Трактат об электричестве и магнетизме. – Т. 1,2 // Москва: Наука, 1989.
2. Джексон Дж.. Классическая электродинамика. – Москва: Мир, 1965.
3. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.. Фейнмановские лекции по физике. – Т. 5. Электричество и магнетизм. Москва: Мир, 1965.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теория поля. Теоретическая физика. – Т. 2. – Москва: Физматлит, 2003.
5. Савельев И.В.. Курс общей физики. – Т. 2. Электричество. – Москва: Наука, 1970.
6. Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения //Дифференциальные уравнения. – Т.39, – № 6, 2003. – С. 769-776
7. Rodrigues W. A , Capelas de Oliviera E. Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin-Clifford bundles// Int. Journal of Theoretical Physics, 29 (1990), 397–412.
8. Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics//J. Math. Phys., 3 (1992), 207–220.
9. Adler S. L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields – New York: Oxford University Press, 1995.
10. De Leo S., Rodrigues Jr. W. A. Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions// Int. J. Theor. Phys. , 36 (1997), 2725–2757.
11. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (2004), № 1, – С. 111-127.
12. Алексеева Л.А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла //Математический журнал, 2003. – № 3. – С.20-24.
13. Acevedo M., Lopez-Bonilla J. , Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations//Apeiron, 12 (2005), No. 4 , 371.
14. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда – Москва-Ижевск, 2009, 362 с.
15. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations// Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications, 2012, V. 7, No 1, 19-39
16. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике – М.: «Наука», 1979, 318 с.
17. Lyudmila Alexeyeva. Relativistic Formulae for the Biquaternionic Model of Electro-Gravi-magnetic Charges and Currents // Journal of Modern Physics.-2017.- 8.-P.1043-1052, https://doi.org/10.4236/jmp.2017.87066
18. Alexeyeva L.A. Biquaternionic Wave Equations and the Properties of Their Generalized Solutions Differential Equations. – 2021. – Vol. 57, №5. – P.594-604. Doi: 10.1134/S0012266121050049

References

1. J.K. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism,* 1,2 V(Moscow: Science, 1989).
2. J. Jackson, *Classical electrodynamics* (Moscow: Mir,1965).
3. R. Feynman, R. Layton and M. Sands, *Feynman lectures on physics*, Electricity and magnetism, 5 V (Moscow: Mir,1965).
4. L.D. Landau and E.M. Lifshits, *Field theory*, Theoretical physics, 2 V(Moscow: Fizmatlit, 2003).
5. I.V. Savelyev, *Course of general physics*, 2 V (Moscow: Science, 1970).
6. L.A. Alekseeva, Hamiltonian form of Maxwell's equations and its generalized solutions, Differential equations,39 V(6), 769-776 (2003).
7. W. A. Rodrigues, Capelas de E. Oliviera, Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spin-Clifford bundles, Int. Journal of Theoretical Physics, 29 (1990), 397–412.

8. D. Finkelstein, J.M. Jauch, S. Schiminovich and D. Speiser, Foundations of quaternion quantum mechanics, J. Math. Phys., 3 (1992), 207–220.

9. S. L. Adler, Quaternionic quantum mechanics and quantum fields, (New York: Oxford University Press, 1995).

10. S. De Leo and Jr. W. A. Rodrigues, Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions, Int. J. Theor. Phys. , 36 (1997), 2725–2757.

11. A.P. Efremov, Quaternions: algebra, geometry and physical theories, Hypercomplex numbers in geometry and physics, 1 (2004), 111-127.

12. L.A. Alekseeva, Quaternions of the Hamiltonian form of Maxwell's equations, Mathematical Journal, No. 3, 20-24 (2003).

13. M.Acevedo, J. Lopez-Bonilla and M. Sanchez-Meraz, Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations, Apeiron, 12 (2005), No. 4, 371.

14. N.G. Marchuk, Equations of field theory and Clifford algebra (Moscow: Izhevsk, 2009), p. 362.

15. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations, Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications,7 V, No 1, 19-39(2012).

16. V.S.Vladimirov, Generalized functions in mathematical physics (Moscow: Science, 1979), p.318.

17. Lyudmila Alexeyeva. Relativistic Formulae for the Biquaternionic Model of Electro-Gravi-magnetic Charges and Currents, Journal of Modern Physics, P. 8, 1043-1052(2017),
https://doi.org/10.4236/jmp.2017.87066.

18. L.A. Alexeyeva, Biquaternionic Wave Equations and the Properties of Their Generalized Solutions Differential Equations, 57 V, 594-604(2021). Doi: 10.1134/S0012266121050049.

Информация об авторах

Алексеева Людмила Алексеевна – физика-математика ғылымдарының докторы профессор, Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Математика және математика институтының математикалық физика және модельдеу бөлімінің бас ғылыми қызметкері (Шевченко 28), alexeeva@math.kz.

Азиз Гүлфариза Нұрланқызы – Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Математика және математика институтының Математикалық физика және модельдеу бөлімінің магистрі, кіші ғылыми қызметкері (Шевченко 28), azizgulfariza@gmail.com.

Alekseeva Lyudmila Alekseeva – Doctor of Physical and Mathematical Sciences Professor, Chief Researcher of the Department of Mathematical Physics and Modeling of the Institute of Mathematics and Mathematics of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Shevchenko 28), alexeeva@math.kz.

Aziz Gulfariza Nurlankyzy – master, junior researcher at the Department of Mathematical Physics and Modeling of the Institute of Mathematics and Mathematics of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Shevchenko 28), azizgulfariza@gmail.com.

Поступила 14 мая 2024
Принято 10 июня 2024