МРНТИ 28.17.23 https://doi.org/10.26577/JPEOS.2023.v25.i1-2.i2

Л.А. Алексеева

Институт математики МОН РК, Казахстан, г. Алматы
e-mail: alexeeva47@mail.ru

БИКВАТЕРНИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА И БИСПИНОРНЫХ ПОЛЕЙ

Здесь строятся и исследуются решения бикватернионного представления системы уравнений Дирака, известных уравнений квантовой механики, которые используются для описания элементарных частиц, спиноров и спинорных полей. Уравнения Дирака относятся к класическим уравнениям теоретической физики и достаточно хорошо изучены. Бикватернионная форма системы уравнений Дирака, которая является ее обобщением и содержит эти уравнения как частный случай, исследована гораздо меньше в работах немногих авторов и в основном связана с групповым анализом этих уравнений или построением частных решений. Работы, связанные с построением фундаментальных решений этих уравнений и на их основе общих решений, как в данной работе, автору неизвестны. Рассмотрены нестационарные и гармонические по времени биспиноры и биспинорные поля в бикватернионном представлении. Эти решения биволнового уравнения Дирака позволяют исследовать трансформацию электрических и гравимагнитных зарядов и токов при воздействии статических внешних электро-гравимагнитных полей и описать порождаемые ими электро-гравимагнитные поля, а также могут найти много полезных приложений при изучении ЭГМ-излучателей самой разной природы и формы. Это может найти много полезных приложений при изучении ЭГМ-излучателей самой разной природы и формы.

Ключевые слова: алгебра, бикватернион, биградиент, биволновое уравнение, уравнение Дирака.

L.A. Alexeyeva

Institute of Mathematics of the Ministry of Education
and Science of the Republic of Kazakhstan, Kazakhstan, Almaty
e-mail: alexeeva47@mail.ru

Biquaternion representation of the Dirack equations and bispinor fields

Solutions of the biquaternion representation of the Dirac system of equations, the well-known equations of quantum mechanics, which are used to describe elementary particles, spinors and spinor fields, are constructed and investigated here. The Dirac equations belong to the classical equations of theoretical physics and are quite well studied. The biquaternionic form of the Dirac system of equations, which is its generalization and contains these equations as a special case, has been studied much less in the works of few authors and is mainly related to the group analysis of these equations or the construction of partial solutions. Works related to the construction of fundamental solutions of these equations and general solutions based on them, as in this work, are unknown to the author. Nonstationary and time-harmonic bispinors and bispinor fields in biquaternion representation are considered. These solutions of the Dirac bi-wave equation allow us to study the transformation of electric and gravimagnetic charges and currents under the influence of static external electro-gravimagnetic fields and describe the electro-gravimagnetic fields generated by them, and can also find many useful applications in the study of EGM emitters of very different nature and shape. This can find many useful applications when studying EGM emitters of very different nature and shape.

Key words: algebra, biquaternion, biogradient, bi-wave equation, dirac equation.

Л.А. Алексеева
ҚР БҒМ Математика институты, Қазақстан, Алматы қ.
e-mail: alexeeva47@mail.ru

**Дирак теңделерінің бікватерниондық көрсетуі
және биспинор ерістері**

Мұнда қарапайым бөлшектерді, спинорларды және спинорлық өрістерді сипаттау үшін қолданылатын Дирак теңдеулер жүйесінің, кванттық механиканың белгілі теңдеулерінің бикватерионды бейнелеу шешімдері құрылады және зерттеледі. Дирак теңдеулері Теориялық физиканың классикалық теңдеулеріне жатады және жақсы зерттелген. Дирак теңдеулер жүйесінің екі жақты формасы, оны жалпылау болып табылады және осы теңдеулерді ерекше жағдай ретінде қамтиды, аз авторлардың еңбектерінде әлдеқайда аз зерттелген және негізінен осы теңдеулерді топтық талдаумен немесе нақты шешімдерді құрумен байланысты. Осы теңдеулердің іргелі шешімдерін құруға және олардың негізінде жалпы шешімдерге байланысты жұмыстар, осы жұмыстағыдай, авторға белгісіз. Бикватерниондық көріністе стационарлық емес және гармоникалық уақыт биспинорлары мен биспинорлық өрістер қарастырылады. Дирак биволн теңдеуінің бұл шешімдері статикалық сыртқы электро-гравимагниттік өрістерге ұшыраған кезде электр және гравимагниттік зарядтар мен токтардың трансформациясын зерттеуге және олар тудыратын электро-гравимагниттік өрістерді сипаттауға мүмкіндік береді, сонымен қатар әртүрлі табиғат пен пішіндегі ЭГМ эмитенттерін зерттеуде көптеген пайдалы қолданбаларды таба алады. Бұл әртүрлі табиғат пен пішіндегі ЭГМ эмитенттерін зерттеу кезінде көптеген пайдалы қолданбаларды таба алады.

Түйін сөздер: алгебра, бикватернион, биоградиент, биволн теңдеуі, Дирак теңдеуі.

Введение

В работах [1-4] разработана бикватернионная модель электрогравимагнитного поля и ЭГМ взаимодействий. В основе ее бикватернионные обобщения систем уравнений Максвелла и Дирака, которые имеют вид бикватернионных волновых уравнений на пространстве Минковского.

Здесь строятся и исследуются решения бикватернионного представления уравнений Дирака. Известно, что эти уравнения квантовой механики используются для описания элементарных частиц, спиноров и спинорных полей [5]. Рассмотрены как нестационарные, так и гармонические по времени и статические спинорные поля в бикватернионном представлении.

1 Алгебра бикватернионов. Поскольку алгебра бикватернионов не очень известна, дадим вначале несколько определений, чтобы не отсылать читателя к [1].

Пространство бикватернионов $B(\mathbf{M}) = \{\mathbf{F} = f + F\}$ – это пространство гиперкомплексных чисел, где f – комплексное число, F – трехмерный вектор с комплексными компонентами:

$$F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3 ,$$

e_1, e_2, e_3 – орты декартовой системы координат в R^3, $e_0 = 1$. Это линейное пространство со сложением (+) : для $\forall a, b$ - комплексных чисел

$$a\mathbf{F} + b\mathbf{G} = a(f + F) + b(g + G) = \\ = (af + bg) + (aF + bG),$$

и с известной операцией кватернионного умножения ($\circ$):

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} = (f + F) \circ (g + G) = \\ = (fg - (F, G)) + (fG + gF + [F, G]) \qquad (1)$$

Здесь и далее $(F, G) = \sum_{j=1}^{3} F_j G_j$ – скалярное произведение F и G, $[F, G] = \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{jkl} F_j G_k e_l$ – их векторное произведение, ε_{jkl} – псевдотензор Леви-Чивита, δ_{jk} – символ Кронекера. Алгебра бикватернионов некоммутативна, поскольку

$$\mathbf{F} \circ \mathbf{G} - \mathbf{G} \circ \mathbf{F} = 2[G, F],$$

но ассоциативна:

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}\circ\mathbf{H}=(\mathbf{F}\circ\mathbf{G})\circ\mathrm{H}=\mathbf{F}\circ(\mathbf{G}\circ\mathbf{H}) \qquad (3)$$

В [1] подробно рассмотрены свойства бикватернионов и даны ряд определений. Перечислим некоторые из них.

Бикватернионы коммутируют, т.е.

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}=\mathbf{G}\circ\mathbf{F},$$

только если их векторные части параллельны: $G\,||\,F$, – либо хотя бы одна из них равна нулю (один из них –скаляр).

Определение 1. *Скалярным произведением* бикватернионов $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2$ назовем билинейную операцию $(\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2)=f_1f_2+(F_1,F_2)$.

Определение 2. *Нормой* бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем скалярную величину

$$\|\mathbf{F}\|=\sqrt{(\mathbf{F},\overline{\mathbf{F}})}=\sqrt{f\cdot\bar{f}+(F,\overline{F})}=\sqrt{|f|^2+\|F\|^2}.$$

Определение 3. *Псевдонормой* бикватерниона $\mathbf{F}$ назовем величину

$$\langle\mathbf{F}\rangle=\sqrt{f\cdot\bar{f}-(F,\overline{F})}=\sqrt{|f|^2-\|F\|^2} \qquad (4)$$

Легко доказывается

Теорема 1. *При известном* $\mathbf{F}$ *и* $\mathbf{B}$ *линейные бикватернионные уравнения вида*

$$\mathbf{F}\circ\mathbf{G}=\mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{G}\circ\mathbf{F}=\mathbf{B} \qquad (6)$$

имеют единственное решение $\mathbf{G}=\mathbf{F}^{-1}\circ\mathbf{B}$ *или* $\mathbf{G}=\mathbf{B}\circ\mathbf{F}^{-1}$ *соответственно, если* $(\mathbf{F},\mathbf{F})\neq 0$.

2. Биградиенты и биволновые уравнения. Введем функциональное пространство бикватернионов

$$\mathrm{B(M)}=\{\mathbf{F}(\tau,x)=f(\tau,x)+F(\tau,x)\},$$

где f – комплекснозначные функции на пространстве Минковского

$$\mathrm{M}=\{(\tau,x),\tau\in R^1,x\in R^3\},$$

а F – трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами ($F=F_1+iF_2$),

f и F – локально интегрируемы и дифференцируемы на M.

Определение 5. *Взаимные биградиенты* – это дифференциальные бикватернионные операторы вида:

$$\nabla^+=\partial_\tau+i\nabla, \qquad \nabla^-=\partial_\tau-i\nabla,$$

где $\nabla=\mathrm{grad}=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$. Их действие на $\mathrm{B(M)}$ определено согласно правилу умножения в алгебре кватернионов:

$$\nabla^\pm\mathbf{F}=(\partial_\tau\pm i\nabla)\circ(f+F)=$$
$$=(\partial_\tau f\mp i(\nabla,F)\pm i\nabla f\pm\partial_\tau F\pm i[\nabla,F],$$

где $(\nabla,F)=\mathrm{div}\,F$, $[\nabla,F]=\mathrm{rot}\,F$

(везде в двойных знаках подразумеваются знаки верхние либо нижние).

Их суперпозиция обладает замечательным свойством, которое легко доказать.

Лемма 1.

$$\nabla^-(\nabla^+\mathbf{F})=\nabla^+(\nabla^-\mathbf{F})=(\nabla^-\circ\nabla^+)\mathbf{F}=\Box\mathbf{F},$$

где $\Box$ *- волновой оператор* (даламбертиан)*:*

$$\Box=\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\Delta,$$

Δ *-- оператор Лапласа* (лапласиан).

Используя ее легко решать дифференциальные уравнения вида:

$$\nabla^\pm\mathbf{K}=\mathbf{G}(\tau,x) \ . \qquad (19)$$

которые называем *биволновыми.* Его решения и свойства инвариантности относительно преобразований Лоренца подробно рассмотрены в [4].

3. Матрицы Дирака. Биволновое уравнение (19) можно записать в матричном виде:

$$\sum_{j=0}^{3}D^{\pm}_{mj}k_j=g_m, \quad m,j=0,1,2,3 \qquad (23)$$

где $k_0 = k,\, g_0 = g,\, k_j = K_j,\, g_j = G_j,\, j = 1,2,3;$ $D^{\pm}_{mj}$ -- компоненты матриц $D^{\pm}$ (соответственно знаку), которые имеют вид:

$$D^{+} = D = \begin{Bmatrix} \partial_\tau & -i\partial_1 & -i\partial_2 & -i\partial_3 \\ i\partial_1 & \partial_\tau & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ i\partial_2 & i\partial_3 & \partial_\tau & -i\partial_1 \\ i\partial_3 & -i\partial_2 & i\partial_1 & \partial_\tau \end{Bmatrix}, \tag{24}$$

$$D^{-} = \overline{D} = \begin{Bmatrix} \partial_\tau & i\partial_1 & i\partial_2 & i\partial_3 \\ -i\partial_1 & \partial_\tau & i\partial_3 & -i\partial_2 \\ -i\partial_2 & -i\partial_3 & \partial_\tau & i\partial_1 \\ -i\partial_3 & i\partial_2 & -i\partial_1 & \partial_\tau \end{Bmatrix}$$

Легко проверить, что их суперпозиция удовлетворяют соотношению:

$$\sum_{j=0}^{3} D_{mj} D_{jl} = \delta_{ml}, \quad j,m,l = 0,1,2,3, \tag{25}$$

где δ_{ml} – символ Кронекера. Покажем, что (24) – это дифференциальные матричные операторы Дирака, которые именно таким свойством обладают. Для этого представим D в матричном виде: $D = \sum_{j=0}^{3} D^j \partial_j$, где матрицы D^j имеют следующие компоненты:

$$D^0 = I,\; D^1 = \begin{Bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{Bmatrix},$$

$$D^2 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{Bmatrix},$$

$$D^3 = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Здесь I единичная матрица $\{4 \times 4\}$. Как видим, это четырехмерные матрицы Дирака, составленные из двухмерных матриц Паули:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \pm i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm i \\ \mp i & 0 \end{pmatrix}$$

Все они унитарные. А их свойство (25) имеет простую для вычислений бикватернионную форму:

$$\nabla^{\mp}\nabla^{\pm} = \nabla^{\pm}\nabla^{\mp} = \Box\ .$$

4. Бикватернионное представление уравнения Дирака. Рассмотрим уравнение вида:

$$\left(\nabla^{\pm} + m\right)\mathbf{B} = \mathbf{F}, \tag{27}$$

где m –константа, вообще говоря, комплек-сная. В силу матричных свойств биградиента, это уравнение можно назвать *неоднородным уравнением Дирака* (УД) в бикватернионной форме, а дифференциальные операторы:

$$\mathbf{D}^{+}_{m} = \nabla^{+} + m, \quad \mathbf{D}^{-}_{m} = \nabla^{-} + m\ ,$$

назовем *биградиентным представлением матричных операторов Дирака.*

Простым вычислением легко показать, что их суперпозиция коммутативна и обладает следующим полезным свойством.

Лемма 2.

$$\mathbf{D}^{+}_{m}\mathbf{D}^{-}_{m} = \mathbf{D}^{-}_{m}\mathbf{D}^{+}_{m} = \Box + m^2 + 2m\partial_\tau,$$
$$\mathbf{D}^{+}_{im}\mathbf{D}^{-}_{im} = \mathbf{D}^{-}_{im}\mathbf{D}^{+}_{im} = \Box - m^2 + 2im\partial_\tau$$

Определим *свертку* двух бикватернионов как выражение вида:

$$\mathbf{A}(\tau,x) * \mathbf{B}(\tau,x) = a * b - \sum_{i,j,l=1}^{3} \left(A_j * B_j\right) + \\ + \sum_{i,j,l=1}^{3} \left(a * A_j\right)e_j + \left(b * B_j\right)e_j + \varepsilon_{ijl}\left(A_i * B_j\right)e_l$$

где в скобках стоят обычные свертки обобщенных функций [7]. Легко видеть, что здесь объединены операции бикватернионного умножения и функциональная свертка.

Теорема 2. *Общее решение уравнения Дирака* (27) *можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \left(\nabla^{\mp} + m\right) \circ \left(\mathbf{F} * \psi^m\right), \qquad (28)$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *решение однородного уравнения* (26) *при* $\mathbf{F} = 0$, $\psi^m(\tau, x)$ -- *фундаментальное решение уравнения*:

$$\Box\psi^m + m^2\psi^m + 2m\partial_\tau\psi^m = \delta(\tau)\delta(x) \qquad (29)$$

Доказательство: В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для второго слагаемого в формуле (28). Подставим его в уравнение Дирака (27) и, используя условия теоремы и лемму 1, получим

$$\left(\nabla^{\pm} + m\right) \circ \left(\nabla^{\mp} + m\right) \circ \left(\mathbf{F} * \psi^m\right) =$$
$$= \left(\Box + 2m\partial_\tau + m^2\right)\left(\mathbf{F} * \psi^m\right) =$$
$$= \mathbf{F} * \left(\Box\psi^m + 2m\partial_\tau\psi^m + m^2\psi^m\right) =$$
$$= \mathbf{F} * \delta(\tau)\delta(x) = \mathbf{F}$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами сверток с производными и дельта-функцией [7].

Очевидно, в силу линейности уравнения, любое решение можно представить в виде (28). Из этой теоремы легко получим следствие, которое сформулируем тоже в виде теоремы.

Теорема 3. *Решение уравнения Дирака вида*

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{B} = \mathbf{F} \qquad (30)$$

можно представить в виде:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right) \circ \left(\mathbf{F} * \psi^{i\rho}\right) \qquad (31)$$

где $\mathbf{B}^0(\tau, x)$ *решение однородного уравнения*

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{B}^0 = 0 \qquad (32)$$

а $\psi^{i\rho}$ -- *фундаментальное решение уравнения*:

$$\Box\psi^{i\rho} - \rho^2\psi^{i\rho} + 2i\rho\,\partial_\tau\psi^{i\rho} = \delta(\tau)\delta(x) \quad (33)$$

Последнее уравнение в левой части, помимо оператора Клейна-Гордона-Фока ($\Box - \rho^2$), содержит первую производную по времени с комплексной единицей, подобный аналогичному члену в уравнении Шредингера, поэтому уравнение (при любом комплексном *m*) вида

$$\left(\Box + m^2 + 2m\partial_\tau\right)u(\tau, x) = f(\tau, x) \quad (34)$$

назовем *уравнением Клейна-Гордона-Фока-Шредингера* (*КГФШ-уравнением*).

Интересно, что появление этого дополнительного члена в уравнение Клейна-Гордона-Фока значительно упрощает вид фундаментального решения (29) и (32), в сравнении с фундаментальным решением уравнения Клейна-Гордона-Фока, которое известно [5].

5. Обобщенные решения КГФШ – уравнения. Скалярные потенциалы спинорных полей. Построим решение уравнения (34). Для этого определим вначале фундаментальное решение (29).

Теорема 4. *Фундаментальные решения КГФШ – уравнения имеют вид:*

$$\psi^m(\tau, x) = \frac{e^{-m\|x\|}}{4\pi\|x\|}\left(a\,H(\tau)\delta(\tau - \|x\|)\right) +$$
$$+ \frac{e^{-m\|x\|}}{4\pi\|x\|}\left((1-a)H(-\tau)\delta(\tau + \|x\|)\right) + \psi_0^m,$$

где $\delta(\tau \pm \|x\|)$ *– простые слои на конусах* $\|x\| = \pm\tau$; $H(\tau)$ *-функция Хевисайда, a – произвольная константа,* $\psi_0^m(\tau, x)$ *– решение однородного КГФШ-уравнения* (при $f = 0$)

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные

Фурье, соответствующие (τ, x) обозначаем (ω, ξ) соответственно. Из (29) следует, что преобразование Фурье по времени функции ψ^m, которое обозначим $F_t[\psi^m]$, является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца:

$$\left\{\Delta - k^2\right\} F_t[\psi^m] + \delta(x) = 0, \quad k = i\omega - m,$$

которое, с точностью до решения однородного уравнения, можно представить в виде [7]:

$$F_t[\psi^m] = \frac{1}{4\pi\|x\|}\left(ae^{-k\|x\|} + (1-a)e^{k\|x\|}\right),$$

где a – произвольная константа. Следовательно

$$F_t[\psi^m] = \frac{ae^{(i\omega - m)\|x\|}}{4\pi\|x\|} + \frac{(1-a)e^{-(i\omega - m)\|x\|}}{4\pi\|x\|}. \quad (35)$$

Отсюда, используя свойства преобразования Фурье, при обратном преобразовании по ω получим формулу теоремы, где носитель первого слагаемого в формуле теоремы – расширяющаяся в R^3 с единичной скоростью сфера радиуса $\tau > 0$, а носитель второго слагаемого – сужающаяся с той же скоростью сфера радиуса $\|x\| = -\tau$, $\tau < 0$. Ч.т.д.

При решении задачи Коши для этого уравнения используют фундаментальное решение с носителем на положительной полуоси времени $\tau \geq 0$:

$$\psi^m = \frac{e^{-m\|x\|}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|). \quad (36)$$

Если $m = i\rho$, – чисто мнимое число, то

$$\psi^m = \frac{e^{-i\rho\|x\|}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) \quad (37)$$

Как видим, здесь плотностью простого слоя на световом конусе является хорошо известное фундаментальное решение уравнения Гельмгольца с волновым числом ρ.

Решения однородного КГФШ-уравнения. Построим решения однородного КГФШ-уравнения:

$$\left(\Box + m^2 + 2m\partial_\tau\right)u(\tau, x) = 0 \quad (38)$$

используя преобразование Фурье (ПФ) обобщенных функций и его свойства. В пространстве ПФ из (38) имеем:

$$\begin{aligned}\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 + m^2 - 2im\omega\right)F_{\omega,\xi}\left[u(\tau, x)\right] = \\ = \left(\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2\right)u^*(\omega, \xi) = 0\end{aligned} \quad (39)$$

где обозначаем $u^*(\omega, \xi) = F_{\omega,\xi}\left[u(\tau, x)\right]$ – полное ПФ по τ, x.

Если $\operatorname{Re} m \neq 0$, тогда $\|\xi\|^2 - (\omega + im)^2 \neq 0$ при $\forall \xi \in R^3$. В этом случае это уравнение имеет только тривиальное нулевое решение: $u^* = 0$. Однако при чисто мнимом $m = i\rho$ уравнение (39) имеет бесчисленное множество решений вида:

$$u^*(\omega, \xi) = \phi(\omega, \xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - (\omega - \rho)^2\right) \quad (40)$$

где $\phi(\omega, \xi)$ – *плотность простого слоя* – произвольно заданная функция *на конусах* $\|\xi\| = |\omega - \rho|$. Вычислим оригинал функции. Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$u(\tau, x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{\|\xi\| = |\omega - \rho|} \phi(\omega, \xi)e^{-i((\xi, x) + \omega\tau)}dS(\xi) =$$

$$= \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4}\int_{R^3} \phi(\rho + \|\xi\|, \xi)e^{-i(\tau\|\xi\| + (\xi, x))}dV(\xi) +$$

$$+ \frac{e^{-i\rho\tau}}{(2\pi)^4}\int_{R^3} \phi(\rho - \|\xi\|, \xi)e^{-i((\xi, x) - \tau\|\xi\|)}dV(\xi)$$

Здесь $dS(\xi)$ – дифференциал площади поверхности сферы радиуса, указанного под знаком соответствующего интеграла. Из этой формулы, в силу произвольности $\phi(\omega,\xi)$, запишем представление скалярных потенциалов спиноров.

Теорема 5. *Если* $\operatorname{Re} m \neq 0$, *то однородное КГФШ – уравнение при* $\tau \geq 0$ *имеет только единственное нулевое решение. Если* $\operatorname{Re} m = 0, m = i\rho$, *существуют ненулевые решения (скалярные потенциалы), которые могут быть представлены в виде*

$$\psi_\rho(\tau,x) = e^{-i\rho\tau}\int_{R^3} f(\xi)e^{i\left((\xi,x)\pm\|\xi\|\tau\right)}dV(\xi), \quad (41)$$

где $\forall f(\xi) \in L_1(R^3)$, *либо в виде суммы решений подобного вида.*

6. Бикватернионное представление спинорных полей. Рассмотрим бикватернионные решения однородного уравнения Дирака:

$$\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{S} = 0. \quad (42)$$

В квантовой механике их называют спинорами или *биспинорами* (с.175 [5]). В частном случае решение вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}^{\mp}_\rho(\tau,x) &= \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\psi_\rho = \\ &= i\rho\psi_\rho + \partial_\tau\psi_\rho \pm i\operatorname{grad}\psi_\rho\end{aligned} \quad (43)$$

назовем *биспинором скалярного поля* $\psi_\rho(\tau,x)$.

Верна следующая

Теорема 6. *Решение уравнения Дирака* (42) *при мнимом* $m = i\rho$ *можно представить в виде свертки*

$$\mathbf{S} = \left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\left(\psi_\rho * \mathbf{C}\right), \quad (44)$$

где $\mathbf{C}(\tau,x)$ *– произвольный бикватернион, а* ψ_ρ *- решение однородного КГФШ-уравнения:*

$$\Box\psi_\rho + 2i\rho\,\partial_\tau\psi_\rho - \rho^2\psi_\rho = 0 \quad (45)$$

либо представимо в виде суммы решений подобного вида.

Доказательство. Подставляя (43) в (42), с учетом (33) и (45), получим

$$\begin{aligned}\left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\mathbf{S}(\tau,x) &= \left(\nabla^{\pm} + i\rho\right)\left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\left(\psi_\rho * \mathbf{C}\right) = \\ &= \left(\Box\psi_\rho + 2i\rho\,\partial_\tau\psi_\rho - \rho^2\psi_\rho\right) * \mathbf{C}(\tau,x) = 0\end{aligned}$$

(соответственно верхнему или нижнему знакам). Обратно, если $\mathbf{S}$ – решение УД (42), тогда

$$\begin{aligned}\left(\Box + m^2 + 2m\partial_\tau\right)\mathbf{S} &= \left(\nabla^{\mp} + m\right)\left(\nabla^{\pm} + m\right)\mathbf{S} = \\ &= \left(\nabla^{\mp} - m\right)0 = 0\end{aligned}$$

Т.е. и скалярная часть и компоненты векторной части $\mathbf{S}$ являются решением однородного КГФШ-уравнения. Следовательно, $\mathbf{S}$ можно представить в виде суммы решений вида (43).

Поскольку определяющим в биспиноре (43) является скалярная волновая функция $\psi_\rho(\tau,x)$, ее можно называть *скалярным потенциалом биспинорного* **C**-*поля.*

Используя его, общее решение однородного УД можно представить в виде свертки:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Psi}^{\mp}_\rho(\tau,x) * \mathbf{C}(\tau,x), \quad (45)$$

где $\mathbf{C}(\tau,x)$ – произвольный бикватернион, допускающий эту свертку. Последнее зависит от свойств скалярного потенциала ψ_ρ, вид которого дает теорема 5.

При вычислении, используя свойства дифференцирования свертки, производные можно перебрасывать на компоненты $\mathbf{C}(\tau,x)$, когда это удобно.

7. Скалярные гармонические потенциалы биспиноров. Рассмотрим скалярный потенциал биспинора (41). Заметим, что под интегралом стоят две плоские гармонические волны:

$$\varphi^{\pm}_\xi(\tau,x) = e^{i\left((\xi,x)-\left(\rho\pm\|\xi\|\right)\tau\right)} \quad (46)$$

которые сами являются решения КГФШ-уравнения (38). Волновой вектор ξ определяет направление движения волны, длина которой равна $\lambda = 2\pi / \|\xi\|$, частота $\omega = \left|\left(\rho \pm \|\xi\|\right)\right|$, период $T = 2\pi / \left|\rho \pm \|\xi\|\right|$. В зависимости от знака, одна из них *сверхзвуковая* (V>1), а другая *дозвуковая* (V<1), т.к. фазовая скорость движения волны

$$V = 1 \pm \frac{\rho}{\|\xi\|}.$$

При $\|\xi\| \to \infty$, $\omega \to \infty$, $V \to 1 \pm 0$. При $\|\xi\| = |\rho|$ скорости $V = 2; 0$, а частоты соответственно $\omega = 2\rho; 0$. Биспиноры, порождаемые этими гармоническими волнами, имеют вид:

$$\left(\nabla^{\mp} + i\rho\right)\varphi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \pm\left(i\|\xi\| + \xi\right)\varphi_{\xi}^{\pm}.$$

Определение. Назовем *гармоническими биспинорами* бикватернионы $\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}$ вида:

$$\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}(\tau, x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i + \frac{\xi}{\|\xi\|}\right)\varphi_{\xi}^{\pm}(\tau, x) \qquad (46)$$

Заметим, что их норма и псевдонорма соответственно равны:

$$\left\|\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}\right\| = 1, \ \left\langle \mathbf{S}_{\xi}^{\pm} \right\rangle = 0.$$

Используя гармонические биспиноры и формулу (42), получим *бикватернионное представление биспиноров* **C**-поля через гармонические биспиноры.

Теорема 7. *Биспиноры* **C**-*поля – это решения уравнений Дирака, которые в бикватернионной форме имеют вид* (42),
где ρ *– действительное число, и их можно представить в виде бикватернионной свертки*

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}(\tau, x) * \mathbf{S}_{\xi}^{\pm}(\tau, x), \qquad (48)$$

либо

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}(\tau, x) * \int_{R^3} f(\xi)\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}(\tau, x) dV(\xi) \qquad , (49)$$

где $\forall f(\xi) \in L_1(R^3)$, $\mathbf{S}_{\xi}^{\pm}$ *– гармонические биспиноры вида* (46), *либо в виде линейной комбинации таких спинорных полей.*

8. Стационарные решения уравнения Дирака. Рассмотрим также важный для приложений класс решений уравнения Дирака вида

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x)e^{-i\omega\tau},$$

которые описывают гармонические колебания с частотой ω. Предполагается, что правая часть (27) имеет ту же структуру: $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x)e^{-i\omega\tau}$. Тогда для комплексных амплитуд получим уравнение, которое приводится к виду:

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right)\mathbf{B} = \mathbf{F}, \qquad (50)$$

где $\nabla_{\omega}^{\pm} = \omega \pm \nabla$, ρ-действительное число. Решения соответствующего однородного уравнения назовем ω*-спинорами*.

Также прямым вычислением доказывается лемма.

Лемма 3.

$$\left(\nabla_{\omega}^{\pm} + \rho\right)\left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right) = \left(\omega + \rho + \nabla\right)\left(\omega + \rho - \nabla\right) =$$
$$= \left(\omega + \rho\right)^2 + \Delta$$

На ее основе аналогично, как в нестационарном случае, доказывается теорема.

Теорема 8. *Комплексные амплитуды* ω*-спиноров можно представить в виде суммы бикватернионов:*

$$\mathbf{B} = \left(\nabla_{\omega}^{\mp} + \rho\right)\left(\chi * \mathbf{F}\right) + \mathbf{S}^{\omega} \qquad (51)$$

где χ *– фундаментальное решение уравнения Гельмгольца*:

$$\Delta\chi + k^2\chi = \delta(x)\ ,\ k = |\omega+\rho|, \tag{52}$$

которое имеет вид:

$$\chi = -\frac{1}{4\pi\|x\|}(ae^{k\|x\|} + (1-a)e^{-k\|x\|}), \tag{53}$$

где $\forall a$ *- коплексное число, а* $\mathbf{S}^{\omega}$ *- решение однородного стационарного уравнения Дирака*

$$\left(\nabla^{\pm}_{\omega} + \rho\right)\mathbf{S}^{\omega} = 0 \tag{54}$$

которое можно представить в виде:

$$\mathbf{S}^{\omega} = \left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \rho\right)\left(\chi_0 * \mathbf{G}(x)\right), \tag{55}$$

где χ_0 *– решение уравнения Гельмгольца:*

$$\Delta\chi_0 + k^2\chi_0 = 0, \tag{56}$$

а $\mathbf{G}(x)$ *-произвольный бикватернион, допускающий свертку* (55).

Решения уравнения Гельмгольца хорошо изучены в сферической и декартовой системах координат. Дадим декартово представление решений (56), подобно выше рассмотренным для однородного КГФШ-уравнения.

Гармонические ω-спиноры. Используя преобразования Фурье по *x* из (56) получим

$$\left(\|\xi\|^2 - k^2\right)\chi_0^*(\xi) = 0\ \Rightarrow$$

$$\chi_0^* = g(\xi)\delta\left(\|\xi\|^2 - k^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\chi_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\|\xi\|=k} g(\xi)\, e^{-i(\xi,x)} dS(\xi) =$$

$$= \frac{k^2}{(2\pi)^3}\int_{\|e\|=1} g(ke)\, e^{-ik(e,x)} dS(e) =$$

$$= \int_{\|e\|=1} p(e)\, e^{-ik(e,x)} dS(e).$$

Откуда следует

$$\chi_0(x) = \int_{\|e\|=1} p(e)\, e^{-ik(e,x)} dS(e)$$

где $p(e)$ – любая заданная и интегрируемая на единичной сфере функция.

Гармонические ω-спиноры имеют вид:

$$\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,e) = \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\nabla^{\mp}_{\omega} + \rho\right)e^{-ik(e,x)} = $$
$$= \frac{1}{k\sqrt{2}}\left(\omega + \rho - ike\right)e^{-ik(e,x)}, \tag{57}$$

$$\left\|\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\right\| = 1,\quad \left\langle\mathbf{\Psi}_0^{\omega}\right\rangle = 0\,.$$

Здесь $k = |\omega+\rho|$ – волновое число ω-спинора e –направление его поляризации.

Через них также можно представить комплексные амплитуды ω-спиноров.

Теорема 8.2. *Решения стационарных УД* (49) *для комплексных амплитуд –* **ω-с***пиноры – можно представить в виде свертки бикватернионов:*

$$\mathbf{S}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,e) \tag{58}$$

либо

$$\mathbf{S}^{\omega} = \mathbf{G}(x) * \int_{\|e\|=1} g(e)\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(x,e) dS(e)\,. \tag{59}$$

где $\forall g(e) \in L_1(S_e), S_e = \{e \in R^3 : \|e\| = 1\}$,

$\mathbf{\Psi}_0^{\omega}(\tau, x)$ *-элементарные спиноры вида* (57).

Статические биспиноры получим при $\omega = 0$.

$$\mathbf{\Psi}_0^{0}(x,e) = \frac{1}{|\rho|\sqrt{2}}\left(\nabla^{\mp}_{0} + \rho\right)e^{-i|\rho|(e,x)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sgn}\rho - ie\right)e^{-i|\rho|(e,x)}$$

Формулы теоремы 7 при этом сохраняют вид, т.к. $k = |\rho| \neq 0$.

Формула (58) определяет неоднородные поляризованные вдоль вектора ***e*** гармонические ω-спинорные поля, амплитуда и фаза колебаний которых зависит от бикватернионного **G**-поля .

Формула (59) – бикватернионное представление неориентрованных гармонических ω-спинорных полей, амплитуда и фаза колебаний которых в каждой токе также определяется бикватернионом **G**-поля.

Заключение

Уравнения Дирака относятся к класическим уравнениям теоретической физики и достаточно хорошо изучены. Бикватернионная форма системы уравнений Дирака, которая является ее обобщением и содержит эти уравнения как частный случай, исследована гораздо меньше в работах немногих авторов и в основном связана с групповым анализом этих уравнений или построением частных решений [8-15]. Работы, связанные с построением фундаментальных решений этих уравнений и на их основе общих решений, как в данной работе, автору неизвестны.

Биволновое уравнение Дирака, как показано в [3], позволяет исследовать трансформацию электрических и гравимагнитных зарядов и токов при воздействии статических внешних электро-гравимагнитных полей и описать порождаемые ими электро-гравимагнитные поля. Это может найти много полезных приложений при изучении ЭГМ-излучателей самой разной природы и формы.

Литература

1. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations// Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications, 2012, V. 7, No 1, 19-39.
2. Alexeyeva L.A. Biquaternionic model of electro-gravimagnetic field, charges and currents. Law of inertia// Journal of modern physics, 2016, V.7, No 5, 435–444, http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.750459
3. Alexeyeva L. A. Biquaternionic Form of Laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents Interactions// Journal of Modern Physics, 2016, V.7, No11, 1351–1358, http://dx.doi.org/10.4236/jmp.2016.711121
4. Lyudmila Alexeyeva. Relativistic Formulae for the Biquaternionic Model of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents // Journal of Modern Physics.-2017.- 8.-P.1043-1052, https://doi.org/10.4236/jmp.2017.87066
5. Математическая энциклопедия. Москва: Советская энциклопедия, 1979, Том 2.
6. Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solu-tions – In the book “ Progress in analysis”.- Moscow.-2013.- Proccedings of the 8th Congress of ISAAC (Moscow,Aug 22-27, 2011), 153-161.
7. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике -М: «Наука», 1979, 318 с.
8. Rodrigues, W. A., Jr., Capelas de Oliviera E. Dirac and Maxwell equations in the Clifford and spinClifford bundles// Int. Journal of Theoretical Physics, 29 (1990), 397–412.
9. Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics//J. Math. Phys., 3 (1992), 207–220.
10. Adler S. L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields – New York: Oxford University Press, 1995.
11. De Leo S., Rodrigues Jr. W. A. Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified quaternions// Int. J. Theor. Phys. , 36 (1997), 2725–2757.
12. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1 (2004), №1, 111-127.
13. Acevedo M., Lopez-Bonilla J. , Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transformations//Apeiron, 12 (2005), No. 4 , 371.
14. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда – Москва-Ижевск, 2009, 362 с.