

Ю.Р. Шпади , А.С. Инчин\* , А.Ю. Лозбин , Г.М. Аязбаев , Р.Ж. Быкаев , М.Ю. Шпади , Б.К. Алиева 

ДТОО «Институт космической техники и технологий», *Казахстан, Алматы*

\*E-mail: [inchinas@mail.ru](mailto:inchinas@mail.ru)

## НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ, СВЯЗАННЫЕ С ОРИЕНТАЦИЕЙ СПУТНИКОВ И БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

**Аннотация.** Стабилизацию беспилотных летательных аппаратов и его ориентирование в заданном направлении обеспечивает система ориентации. Одним из важных этапов в процессе разработки систем ориентации беспилотных летательных аппаратов является отработка алгоритмов ориентации объектов. Задача ориентации объектов по магнитному полю основаны на оценке расхождений модельных  $V_{mod}$  и измеренных Визм компонент магнитного поля Земли. Соответственно, в работе обсуждаются некоторые алгоритмы, связанные с ориентацией спутников и беспилотных летательных аппаратов. Показано, что ограничение модели первыми 13 гармониками может привести к погрешностям представления главного магнитного поля Земли около 15 нТл. Проведено математическое доказательство этого факта на основе рассмотрения уравнения идеального измерителя магнитного поля. В работе аналитически доказывается, что матрица Якоби вектора измерений магнитного поля в земной системе координат имеет определитель, равный нулю, что означает, что, располагая знанием вектора измерения магнитного поля  $H-1$ , невозможно однозначно определить вектор углов ориентации измерителя  $\{\phi, \theta, \psi\}^T$ . Таким образом, в работе показан алгоритм для расчета углов ориентации в зависимости от значений измеренных и модельных значений магнитного поля Земли.

**Ключевые слова:** аппаратно – программный комплекс, тестирование, система ориентации, спутник, БПЛА, проектирование.

Ю.Р. Шпади, А.С. Инчин\*, А.Ю. Лозбин, Г.М. Аязбаев, Р.Ж. Быкаев, М.Ю. Шпади, Б.К. Алиева

«Ғарыштық техника және технологиялар институты» ДТОО, Қазақстан, Алматы

\*E-mail: [inchinas@mail.ru](mailto:inchinas@mail.ru)

### Спутниктерді және ұшқышсыз ұшу аппараттарын бағдарлауға қатысты кейбір алгоритмдер

**Андатпа.** Ұшқышсыз ұшу аппараттарын тұрақтандыру және оның берілген бағытта бағдарлануы бағдарлау жүйесімен қамтамасыз етіледі. Ұшқышсыз ұшу аппараттары бағдарлау жүйесін дамытудың маңызды кезеңдерінің бірі объектіге бағдарлау алгоритмдерін жасау болып табылады. Магниттік өрістегі объектілерді бағдарлау мәселесі  $V_{mod}$  моделі мен Жердің магнит өрісінің өлшенген  $V_{meas}$  компоненттері арасындағы сәйкессіздіктерді бағалауға негізделген. Тиісінше, мақалада спутниктердің және ұшқышсыз ұшу аппараттарының бағдарлануына қатысты кейбір алгоритмдер талқыланады. Модельді алғашқы 13 гармоникамен шектеу Жердің негізгі магнит өрісін шамамен 15 нТ бейнелеуде қателіктерге әкелуі мүмкін екендігі көрсетілген. Бұл фактінің математикалық дәлелі идеалды магнит өрісінің өлшегішінің теңдеуін қарастыру негізінде жүзеге асырылады. Жұмыс жер координаталар жүйесіндегі магнит өрісін өлшеу векторының якобиялық матрицасының нөлге тең детерминантқа ие екендігін аналитикалық түрде дәлелдейді, яғни магнит өрісінің  $H-1$  өлшеу векторын біле отырып, векторды бірегей түрде анықтау мүмкін емес. метрдің бағдарлау бұрыштарының  $\{\phi, \theta, \psi\}^T$ - бойлық осьтің горизонт жазықтығынан бұрыштық ауытқуы (көлденең ось айналасында айналуы) қадам деп аталады, бойлық ось айналасындағы бұрыштық айналу орам деп аталады, тік оське қатысты айналу бұрышы иілу деп аталады. Осылайша, қағазда Жердің магнит өрісінің өлшенген және модельдік мәндерінің мәндеріне байланысты бағдарлау бұрыштарын есептеу алгоритмі көрсетілген.

**Түйін сөздер:** аппараттық-бағдарламалық кешен, тестілеу, бағдарлау жүйесі, спутниктік, ҰҒА, жобалау.

Yu.R. Shpadi, A.S. Inchin\*, A.Yu. Lozbin, G.M. Ayazbaev, R.Zh. Bykaev, M.Yu. Shpadi, B.K. Alieva  
 Institute of Space Engineering and Technology, Kazakhstan, Almaty  
 \*E-mail: [inchinas@mail.ru](mailto:inchinas@mail.ru)

### Some algorithms related to the orientation of satellites and unmanned aerial vehicles

**Abstract.** The stabilization of unmanned aerial vehicles and its orientation in a given direction is provided by the orientation system. One of the important stages in the development of UAV orientation systems is the development of object orientation algorithms. The problem of orientation of objects in the magnetic field is based on the estimation of the discrepancies between the model  $B_{mod}$  and the measured  $B_{meas}$  components of the Earth's magnetic field. Accordingly, the paper discusses some algorithms related to the orientation of satellites and unmanned aerial vehicles. It is shown that limiting the model to the first 13 harmonics can lead to errors in the representation of the Earth's main magnetic field of about 15 nT. A mathematical proof of this fact is carried out based on the consideration of the equation of an ideal magnetic field meter. The work analytically proves that the Jacobian matrix of the magnetic field measurement vector in the earth's coordinate system has a determinant equal to zero, which means that, having knowledge of the magnetic field measurement vector  $H-1$ , it is impossible to uniquely determine the vector of the orientation angles of the meter  $\{f, \alpha, \gamma\}$ . Thus, the paper shows an algorithm for calculating the orientation angles depending on the values of the measured and model values of the Earth's magnetic field.

**Keywords:** аппараттық-бағдарламалық кешен, тестілеу, бағдарлау жүйесі, спутниктік, UAV, дизайн.

#### Введение

В практических задачах, связанных с ориентацией беспилотных летательных аппаратов (БПЛА), а также спутников используются различные модели магнитного поля Земли (МПЗ) [1]. Существуют три наиболее используемые модели геомагнитного поля Земли:

1. IGRF (International Geomagnetic Reference Field) – разработано Международной Ассоциацией Геомагнетизма и аэронавтики (The International Association of Geomagnetism and Aeronomy, IAGA) [2].

2. WMM (World Magnetic Model) – всемирная модель геомагнитного поля Земли - разработана Национальным агентством США по обработке пространственных геоданных (The U.S. National Geospatial-Intelligence Agency, NGA), Национальным центром геофизических данных США (The U.S. National Geophysical Data Center, NGDC, <http://www.ngdc.noaa.gov/ngdc.html>) и Британским геологоразведочным

обществом (the British Geological Survey, BGS, [3]

3. Глобальная модель геомагнитного поля - BGGM (The BGS Global Geomagnetic Model – разработана Британским геологоразведочным обществом (the British Geological Survey, BGS, [4].

Задача ориентации объектов по магнитному полю основаны на оценке расхождений модельных  $B_{mod}$  и измеренных  $B_{изм}$  компонент МПЗ. Ориентация объекта определяется тремя углами, которые называют корабельными – креном  $\theta$ , тангажем  $\psi$  и рысканием  $\phi$ , которые неразрывно связаны с коэффициентами матрицы перехода от измеренных значения поля к модельным

$$B_{mod} = A \cdot B_{изм}$$

Здесь  $A$  - матрица перехода от измеренных компонент поля к модельным. Алгоритм расчета матрицы перехода от спутниковой системы координат к орбитальной приведен в отдельном разделе статьи.

$$A(\theta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}$$

Введем несколько пояснений к использованию алгоритмов расчета матрицы перехода от измеренных данных к модельным, также переход от матрицы перехода к значениям углов ориентации. Оценена погрешность модели WMM в зависимости от количества гармоник, включенных в модель. Показано, что ограничение модели первыми 13 гармониками может привести к погрешностям представления главного МПЗ около 15 нТл. Магнитные измерения выполнялись протонными магнитометрами, имеющими погрешность измерений ~1 нТл. [5]. Для модели IGRF погрешности вычисления главного МПЗ оцениваются в  $\pm 100$  нТл по компонентам [6]. Близкие к ним и оценки погрешности расчета МПЗ по модели BGGM/

Погрешность измерений (чувствительность) измерений компонент поля на примере типового магнитометра RM3100 составляет 75 нТл. Для упрощения расчетов примем, что погрешность модели будет до 100 нТл, и погрешность модели - до 100 нТл. Качество измерений существующими датчиками можно оценить на примере трехкомпонентного бюджетного магнитометра [7].

Геомагнитные датчики используются для измерения магнитного поля Земли; однако, в реальных условиях мира магнитное поле Земли искажено другими окружающими полями. Компоненты системы, такие как батареи, экранирующие материалы, или моторчики, искажают поле возле датчика. Еще одной дизайнерской задачей магнитометра является меняющаяся Магнитная среда, которая временно искажает поле, как

металлические детали в мебели, проезжая машина, или близлежащие Сотовые телефоны и компьютеры. Геомагнитные датчики должны учитывать такие искажения МПЗ и в конечном счете обеспечивать заданную точность измерений.

Отметим, что существует принципиальная трудность, заключающаяся в невозможности однозначного определения ориентации летательного аппарата только по измерениям магнитного поля. Необходим еще один вектор, обычно – это направление Солнце. Проведено математическое доказательство этого факта на основе рассмотрения уравнения идеального измерителя магнитного поля. Аналитически доказывается, что матрица Якоби вектора измерений магнитного поля в земной системе координат имеет определитель, равный нулю, что означает, что, располагая знанием вектора измерения магнитного поля  $H-1$ , невозможно однозначно определить вектор углов ориентации измерителя  $\{\varphi, \theta, \psi\}^T$  [8]. Поскольку нас интересует влияние на углы ориентации отклонений только модельного МПЗ от измеренного, направление на Солнце в главном меню программы примем неизменным  $S_{mod}(1,0,0) = S_{izm}(1,0,0)$ .

Для расчета углов ориентации в зависимости от значений измеренных и модельных значений МПЗ использован алгоритм, приведенный ниже. Этот алгоритм реализован в виде программы (автор Ю.Р.Шпади), главное меню которого приведено на рисунке 1.

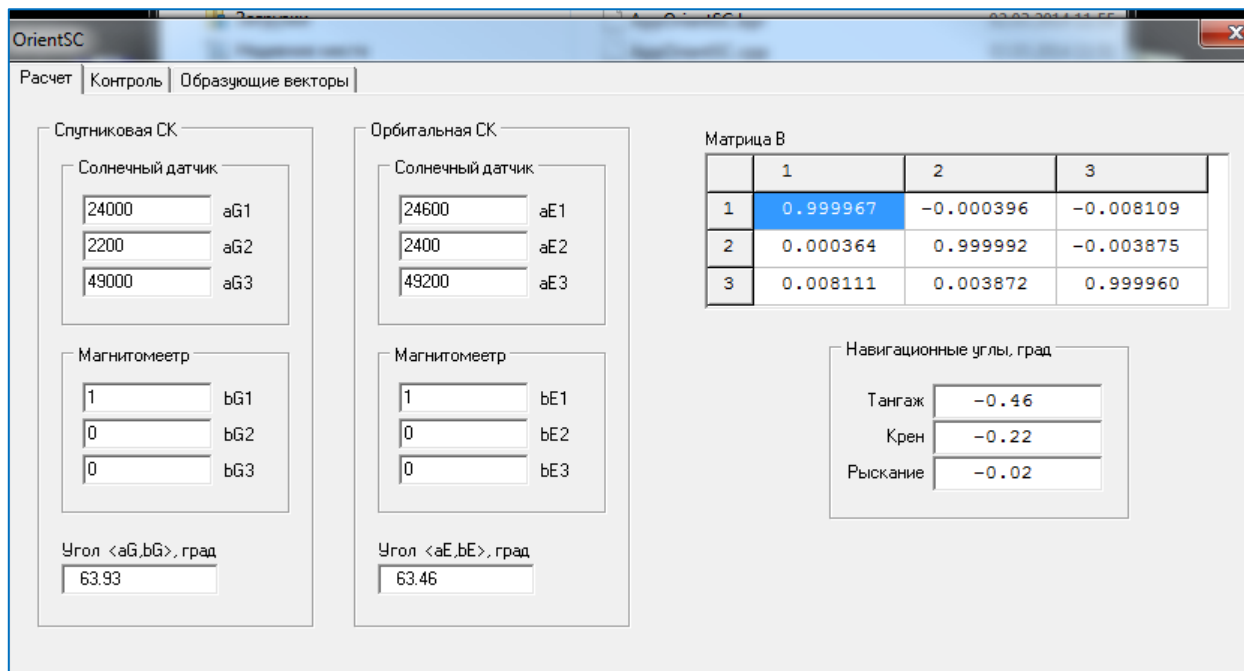


Рисунок 1 – Главное меню программы расчёта углов ориентации в зависимости от 2-х векторов

Отметим, что существует принципиальная трудность, заключающаяся в невозможности однозначного определения ориентации летательного аппарата только по измерениям магнитного поля. Необходим еще один вектор, обычно – это параметры направления Солнце. Проведено математическое доказательство этого факта на основе рассмотрения уравнения идеального измерителя магнитного поля. Аналитически доказывается, что матрица Якоби вектора измерений магнитного поля в земной системе координат имеет определитель, равный нулю, что означает, что, располагая знанием вектора измерения магнитного поля, невозможно однозначно определить вектор углов ориентации измерителя [8].

Для расчета модельного МПЗ возможно использования любой из 3-х приведенных моделей поля.

#### Алгоритм учета ориентации при векторных измерениях на БПЛА

Измеряемые постоянные и переменные магнитные поля, электрические поля являются векторными величинами, поэтому их реальные значения напрямую зависят от ориентации платформы, с которой связана спутниковая

система координат, относительно орбитальной системы координат. Отметим, что при нарушении ориентации платформы эта процедура является обязательной, иначе векторные данные просто теряют свой научный смысл.

Пусть OXYZ орбитальная система координат круговой орбиты с началом O в центре масс спутника:

- Ось OZ – направлена по прямой «центр Земли – центр масс спутника»;
- Ось OX – лежит в плоскости орбиты спутника, ортогональна оси OZ и направлена в сторону движения КА;
- Ось OY – дополняет систему координат до правой.

Спутниковая система координат имеет начало в центре масс спутника, а ее оси связаны с навигационной системой платформы КА. Таким образом, если платформа спутника поддерживает точную ориентацию, то орбитальная система координат совпадает со спутниковой. В противном случае ориентация спутника определяется тремя углами – креном ( $\theta$ ) – поворотом относительно оси OX, тангажем ( $\psi$ ) – поворотом относительно оси OZ, рысканием ( $\varphi$ ) – поворотом относительно оси OY.

Для восстановления истинных значений компонент вектора магнитного и электрического поля необходимо найти матрицу поворотов  $A(\theta, \psi, \varphi)$ , обеспечивающую преобразование систем координат.

Поворот одной жесткой системы координат относительно другой представляется как последовательность трех поворотов относительно осей системы  $A(\theta, \psi, \varphi) = A(\theta)A(\psi)A(\varphi)$ . При этом матрица (1.1):

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

задает поворот системы относительно оси OX.

Матрица (1.2):

$$A(\theta, \psi, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi & -\cos \psi \sin \varphi & \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \theta \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \psi \sin \varphi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi - \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & \cos \theta \cos \psi \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы найти компоненты вектора в орбитальной системе координат, необходимо матрицу поворота умножить на компоненты вектора в спутниковой системе координат (1.5):

$$\begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} = A(\theta, \psi, \varphi) \begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

### Алгоритм расчета матрицы перехода от спутниковой системы координат к орбитальной

Под ориентацией БПЛА и спутников понимаем угловое смещение платформы летательного аппарата (ЛА) от некоторого заданного положения при его движении по трассе. Знание ориентации ЛА необходимо для приведения данных научных приборов, зависящих от направления измерений (электрических, магнитных полей и др.), получаемых на протяжении полета, к некоторой фиксированной системе координат.

Полагаем, что с ЛА связана ортогональная правосторонняя система

$$A(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

поворачивает систему относительно оси OY, и матрица (1.3):

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

поворачивает систему относительно оси OZ.

Тогда, итоговая матрица примет вид (1.4):

координат, относительно которой определено положение его платформы, служебной и научно-измерительной аппаратуры. Базовая система координат, относительно которой необходимо вычислить ориентацию ЛА, также считается ортогональной и правосторонней. В частности, это может быть орбитальная система координат, однако может быть выбрана и другая система.

Расчет ориентации ЛА производится на основании известных направлений двух лучей, в частности, на Солнце и вдоль магнитной силовой линии. Угловые координаты лучей в системе координат ЛА измеряются соответственно солнечными и магнитными датчиками. Текущие угловые координаты этих же лучей в базовой системе координат определяются с помощью непосредственных вычислений, использующих данные о положении ЛА в пространстве.

Пусть E – множество векторов, компоненты которых заданы в базовой системе, а G – множество векторов,

компоненты которых заданы в системе КА. То есть, полагаем, что вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_E = \{x_E, y_E, z_E\}$  принадлежит множеству  $E$ ,  $\mathbf{a} \in E$ , если его компоненты  $\{x_E, y_E, z_E\}$  заданы в базисе системы  $E$ , и тот же вектор  $\mathbf{a} = \mathbf{a}_G = \{x_G, y_G, z_G\}$  принадлежит множеству  $G$ ,  $\mathbf{a} \in G$ , если его компоненты  $\{x_G, y_G, z_G\}$  рассматриваются в базисе системы  $G$ .

Введем два ортонормированных правосторонних базиса:  $\mathbf{e}_k = \{e_{k1}, e_{k2}, e_{k3}\}$  на множестве  $E$  и  $\mathbf{g}_k = \{g_{k1}, g_{k2}, g_{k3}\}$  на множестве  $G$ ,  $k=1,2,3$ , а также матрицу

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}, \text{ которая связывает эти}$$

базисы:

$$\mathbf{g}_k = \sum_{i=1}^3 \beta_{ki} \mathbf{e}_i, \quad (1.6)$$

$$k=1,2,3.$$

Тогда между компонентами вектора  $\mathbf{a}$  будет определена зависимость (1.7):

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Действительно (1.8),

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G &= x_G \mathbf{g}_1 + y_G \mathbf{g}_2 + z_G \mathbf{g}_3 = x_G \sum_{i=1}^3 \beta_{1i} \mathbf{e}_i + y_G \sum_{i=1}^3 \beta_{2i} \mathbf{e}_i + z_G \sum_{i=1}^3 \beta_{3i} \mathbf{e}_i = \\ &= (x_G \beta_{11} + y_G \beta_{21} + z_G \beta_{31}) \mathbf{e}_1 + (x_G \beta_{12} + y_G \beta_{22} + z_G \beta_{32}) \mathbf{e}_2 + (x_G \beta_{13} + y_G \beta_{23} + z_G \beta_{33}) \mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (1.8)$$

то есть

$$\begin{aligned} x_E &= x_G \beta_{11} + y_G \beta_{21} + z_G \beta_{31}, \\ y_E &= x_G \beta_{12} + y_G \beta_{22} + z_G \beta_{32}, \\ z_E &= x_G \beta_{13} + y_G \beta_{23} + z_G \beta_{33}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В матричной форме равенства 1.9 принимают вид 1.10:

$$\begin{pmatrix} x_E \\ y_E \\ z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

или (1.11):

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{B} \mathbf{a}_E, \quad \mathbf{a}_E = \mathbf{B}^T \mathbf{a}_G. \quad (1.11)$$

Матрица  $\mathbf{B}$ , собственно, и определяет ориентацию КА относительно базовой системы координат.

Определим направления лучей на Солнце и по магнитному полю единичными векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . По постановке задачи для этих векторов известны координаты относительно обеих систем координат:

в системе  $E$  –

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_E = \{a_{E1}, a_{E2}, a_{E3}\},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_E = \{b_{E1}, b_{E2}, b_{E3}\},$$

в системе  $G$  –

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_G = \{a_{G1}, a_{G2}, a_{G3}\},$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_G = \{b_{G1}, b_{G2}, b_{G3}\}.$$

С помощью этих векторов построим правостороннюю ортогональную систему координат с ортами  $\mathbf{h}_k$ ,  $k=1,2,3$ . Положим (1.12):

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{a} \quad (1.12)$$

(или  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{b}$  – это безразлично) и далее вычислим (1.13-1.14):

$$\mathbf{h}_2 = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \quad (1.13)$$

и

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2. \quad (1.14)$$

Найдем координаты векторов  $\mathbf{h}_k$  относительно обеих систем  $E$  и  $G$ . Пусть в системе  $E$   $\mathbf{h}_k = \{\mu_{k1}, \mu_{k2}, \mu_{k3}\}$ , то есть (1.15):

$$\mathbf{h}_k = \sum_{i=1}^3 \mu_{ki} \mathbf{e}_i, \quad k=1,2,3. \quad (1.15)$$

$$\mu_{i1} = a_{Ei}, \quad i=1,2,3, \quad (1.16)$$

Тогда, на основании формул (1.13)–(1.14), получим

$$\mathbf{a}_E \times \mathbf{b}_E = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_{E1} & a_{E2} & a_{E3} \\ b_{E1} & b_{E2} & b_{E3} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{E2}b_{E3} - a_{E3}b_{E2})\mathbf{e}_1 + (a_{E3}b_{E1} - a_{E1}b_{E3})\mathbf{e}_2 + (a_{E1}b_{E2} - a_{E2}b_{E1})\mathbf{e}_3,$$

$$m_E = |\mathbf{a}_E \times \mathbf{b}_E| = \sqrt{(a_{E2}b_{E3} - a_{E3}b_{E2})^2 + (a_{E3}b_{E1} - a_{E1}b_{E3})^2 + (a_{E1}b_{E2} - a_{E2}b_{E1})^2},$$

$$\mu_{21} = \frac{a_{E2}b_{E3} - a_{E3}b_{E2}}{m_E}, \quad \mu_{22} = \frac{a_{E3}b_{E1} - a_{E1}b_{E3}}{m_E}, \quad \mu_{23} = \frac{a_{E1}b_{E2} - a_{E2}b_{E1}}{m_E}, \quad (1.17)$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= (\mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22})\mathbf{e}_1 + (\mu_{13}\mu_{21} - \mu_{11}\mu_{23})\mathbf{e}_2 + (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21})\mathbf{e}_3,$$

$$\mu_{31} = \mu_{12}\mu_{23} - \mu_{13}\mu_{22}, \quad \mu_{32} = \mu_{13}\mu_{21} - \mu_{11}\mu_{23}, \quad \mu_{33} = \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}. \quad (1.18)$$

получим

Аналогично, полагая, что в системе  $G$   $\mathbf{h}_k = \{\eta_{k1}, \eta_{k2}, \eta_{k3}\}$ ,  $\eta_{i1} = a_{Gi}, \quad i=1,2,3, \quad (1.20)$

$$\mathbf{h}_k = \sum_{i=1}^3 \eta_{ki} \mathbf{g}_i, \quad k=1,2,3. \quad (1.19)$$

$$\mathbf{a}_G \times \mathbf{b}_G = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ a_{G1} & a_{G2} & a_{G3} \\ b_{G1} & b_{G2} & b_{G3} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{G2}b_{G3} - a_{G3}b_{G2})\mathbf{g}_1 + (a_{G3}b_{G1} - a_{G1}b_{G3})\mathbf{g}_2 + (a_{G1}b_{G2} - a_{G2}b_{G1})\mathbf{g}_3,$$

$$m_G = |\mathbf{a}_G \times \mathbf{b}_G| = \sqrt{(a_{G2}b_{G3} - a_{G3}b_{G2})^2 + (a_{G3}b_{G1} - a_{G1}b_{G3})^2 + (a_{G1}b_{G2} - a_{G2}b_{G1})^2},$$

$$\eta_{21} = \frac{a_{G2}b_{G3} - a_{G3}b_{G2}}{m_G}, \quad \eta_{22} = \frac{a_{G3}b_{G1} - a_{G1}b_{G3}}{m_G}, \quad \eta_{23} = \frac{a_{G1}b_{G2} - a_{G2}b_{G1}}{m_G}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{h}_3 = \mathbf{h}_1 \times \mathbf{h}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \\ \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \eta_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= (\eta_{12}\eta_{23} - \eta_{13}\eta_{22})\mathbf{g}_1 + (\eta_{13}\eta_{21} - \eta_{11}\eta_{23})\mathbf{g}_2 + (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})\mathbf{g}_3,$$

$$\eta_{31} = \eta_{12}\eta_{23} - \eta_{13}\eta_{22}, \quad \eta_{32} = \eta_{13}\eta_{21} - \eta_{11}\eta_{23}, \quad \eta_{33} = \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}. \quad (1.22)$$

Так как векторы в (1.15) и (1.19) являются базисами ортонормированных систем, то матрицы коэффициентов в (1.15) и (1.19).

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{21} & \mu_{31} \\ \mu_{12} & \mu_{22} & \mu_{32} \\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{21} & \eta_{31} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{32} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{pmatrix}.$$

являются ортогональными.

Разрешим систему уравнений (1.19)

относительно  $\mathbf{g}_k$ . Так как матрица  $\mathbf{N}$  ортогональна, то обратная ей совпадает с ее транспонированной,  $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N}^T$ . Поэтому

$$\mathbf{g}_k = \sum_{i=1}^3 \eta_{ik} \mathbf{h}_i, \quad k=1,2,3. \quad (1.23)$$

Подставляя (1.19) в (1.23),

получим

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_k &= \sum_{j=1}^3 \eta_{jk} \left( \sum_{i=1}^3 \mu_{ji} \mathbf{e}_i \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \mu_{ji} \eta_{jk} \right) \mathbf{e}_i. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Найдем элементы искомой матрицы

$\mathbf{B}$ :

$$\beta_{ki} = \sum_{j=1}^3 \mu_{ji} \eta_{jk}, \quad k,i=1,2,3, \quad (1.25)$$

где элементы  $\mu_{ji}$  и  $\eta_{jk}$  вычисляются по формулам (1.12)–(1.14). Выражение (1.25) можно записать в эквивалентной матричной форме (1.26):

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}^T \mathbf{M}. \quad (1.26)$$

Данная задача корректно и однозначно разрешима, если координаты векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  измерены и вычислены с достаточной степенью точности, причем они оказываются не коллинеарными друг другу. Оценить степень точности можно, сравнив скалярные произведения, вычисленные в системах  $E$  и  $G$ . Так как скалярное произведение векторов не зависит от системы координат, в которой определены векторы, то должно выполняться тождество (1.27):

$$\mathbf{a}_E \mathbf{b}_E = \mathbf{a}_G \mathbf{b}_G \quad (1.27)$$

или в координатной форме (1.28):

$$a_{E1} b_{E1} + a_{E2} b_{E2} + a_{E3} b_{E3} = a_{G1} b_{G1} + a_{G2} b_{G2} + a_{G3} b_{G3} \quad (1.28)$$

### Алгоритм приведения матрицы ориентации КА к трем последовательным вращениям.

Формула Б.4.34 с матрицей  $\mathbf{B}$  не дает наглядного представления положения системы  $G$  и связанного с ней КА относительно системы  $E$ . Так как матрица  $\mathbf{B}$  ортогональна, то девять ее элементов связаны шестью соотношениями – нормировкой столбцов (или строк) к единице и их взаимной ортогональностью. То есть всякая ортогональная матрица может быть задана только тремя параметрами. В механике доказано, что такими параметрами могут быть углы вращения относительно трех осей, приводящие произвольную матрицу  $\mathbf{G}$  к ее базовой матрице  $\mathbf{B}$ , относительно которой задана матрица  $\mathbf{G}$ . Выбор осей поворота достаточно произволен. В морском судоходстве и авиации вращение производится вокруг главных осей вращения – продольной оси корабля или самолета, поперечной и вертикальной, проходящих через центр тяжести аппарата. Угловое отклонение продольной оси от плоскости горизонта (вращение вокруг поперечной оси) называется тангажом, угловое вращение вокруг продольной оси – креном, угол вращения относительно вертикальной оси – рысканием.

В рассматриваемом случае полагаем, что продольной осью КА является ось  $\mathbf{g}_1$ , поперечной – ось  $\mathbf{g}_2$  и вертикальной –  $\mathbf{g}_3$ , которые в нулевом, не отклоненном, состоянии совпадают соответственно с векторами  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ . Обозначим углы тангажа, крена и рыскания для КА соответственно  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $\psi$ . Тогда,  
 $\theta$ ,  $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ , – угол между вектором  $\mathbf{g}_1$  и плоскостью векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ ;  
 $\varphi$ ,  $-180^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ , – угол между вектором  $\mathbf{g}_2$  и плоскостью ортов  $\mathbf{g}_1$  и  $\mathbf{e}_3$ ;



$\psi$ ,  $-180^\circ < \psi \leq 180^\circ$ , – угол между проекцией вектора  $\mathbf{g}_1$  на плоскость векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  и плоскостью векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ .

Начнем с определения рыскания  $\psi$ . Проекция вектора  $\mathbf{g}_1$  на плоскость векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  равна (1.29):

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2. \quad (1.29)$$

Тогда

$$\cos \psi = \frac{(\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1}{|\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_1|} = \frac{\beta_{11}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}},$$

$$\sin \psi = \frac{(\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2}{|\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2||\mathbf{e}_2|} = \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}},$$

и

$$\mathbf{A}_\psi = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{11}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & 0 \\ -\frac{\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{11}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу  $\mathbf{B}$  справа на транспонированную матрицу  $\mathbf{A}_\psi$ , получим матрицу (1.30):

$$\mathbf{B}\mathbf{A}_\psi^T = \begin{pmatrix} \frac{\beta_{11}^2}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{12}^2}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{11}\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{11}\beta_{12}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{13} \\ \frac{\beta_{11}\beta_{21}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{12}\beta_{22}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{12}\beta_{21}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{11}\beta_{22}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{23} \\ \frac{\beta_{11}\beta_{31}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{12}\beta_{32}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{12}\beta_{31}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \frac{\beta_{11}\beta_{32}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & 0 & \beta_{13} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{23} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{11}\beta_{32} - \beta_{12}\beta_{31}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Упростим второй столбец матрицы  $\mathbf{B}\mathbf{A}_\psi^T$ . Учитывая, что система координат  $\mathbf{G}$  правосторонняя, то  $\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_3$ ,

$\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3 = \mathbf{g}_1$ ,  $\mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2$ , то есть каждый вектор  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$  является векторным

произведением двух других, взятых в определенном порядке.

Тогда, раскрывая произведение

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_2 &= (\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3) \times (\beta_{21}\mathbf{e}_1 + \beta_{22}\mathbf{e}_2 + \beta_{23}\mathbf{e}_3) = \\ &= \beta_{11}\beta_{22}\mathbf{e}_3 - \beta_{11}\beta_{23}\mathbf{e}_2 - \beta_{12}\beta_{21}\mathbf{e}_3 + \beta_{12}\beta_{23}\mathbf{e}_1 + \beta_{13}\beta_{21}\mathbf{e}_2 - \beta_{13}\beta_{22}\mathbf{e}_1 = \\ &= (\beta_{12}\beta_{23} - \beta_{13}\beta_{22})\mathbf{e}_1 + (\beta_{13}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{23})\mathbf{e}_2 + (\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21})\mathbf{e}_3 = \beta_{31}\mathbf{e}_1 + \beta_{32}\mathbf{e}_2 + \beta_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

найдем

$$\beta_{31} = \beta_{12}\beta_{23} - \beta_{13}\beta_{22}, \quad \beta_{32} = \beta_{13}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{23}, \quad \beta_{33} = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_3 \times \mathbf{g}_1 &= (\beta_{31}\mathbf{e}_1 + \beta_{32}\mathbf{e}_2 + \beta_{33}\mathbf{e}_3) \times (\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3) = \\ &= \beta_{31}\beta_{12}\mathbf{e}_3 - \beta_{31}\beta_{13}\mathbf{e}_2 - \beta_{32}\beta_{11}\mathbf{e}_3 + \beta_{32}\beta_{13}\mathbf{e}_1 + \beta_{33}\beta_{11}\mathbf{e}_2 - \beta_{33}\beta_{12}\mathbf{e}_1 = \\ &= (\beta_{32}\beta_{13} - \beta_{33}\beta_{12})\mathbf{e}_1 + (\beta_{33}\beta_{11} - \beta_{31}\beta_{13})\mathbf{e}_2 + (\beta_{31}\beta_{12} - \beta_{32}\beta_{11})\mathbf{e}_3 = \beta_{21}\mathbf{e}_1 + \beta_{22}\mathbf{e}_2 + \beta_{23}\mathbf{e}_3, \end{aligned}$$

откуда получаем соотношения (1.31):

$$\beta_{21} = \beta_{32}\beta_{13} - \beta_{33}\beta_{12}, \quad \beta_{22} = \beta_{33}\beta_{11} - \beta_{31}\beta_{13}, \quad \beta_{23} = \beta_{31}\beta_{12} - \beta_{32}\beta_{11}. \quad (1.31)$$

Тогда матрица примет вид (1.32):

$$\mathbf{B}\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & 0 & \beta_{13} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{23} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Угол тангажа  $\theta$  равен углу между вектором  $\mathbf{g}_1$  и его проекцией  $\bar{\mathbf{g}}_1$  на плоскость векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ , отсчитываемом от плоскости векторов  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$ . Так как

$$\bar{\mathbf{g}}_1 = \beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2,$$

то косинус угла тангажа будет определяться по формуле 1.33:

$$\cos \theta = \frac{\bar{\mathbf{g}}_1 \mathbf{g}_1}{|\bar{\mathbf{g}}_1| |\mathbf{g}_1|} = \frac{(\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2)(\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3)}{|\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2| \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} = \frac{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} = \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}. \quad (1.33)$$

Косинус угла  $\theta_0$  между вектором  $\mathbf{g}_1$  и ортом  $\mathbf{e}_3$  определяется скалярным произведением (1.34):

$$\cos \theta_0 = \mathbf{g}_1 \mathbf{e}_3 = (\beta_{11}\mathbf{e}_1 + \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 = \beta_{13}, \quad (1.34)$$

так что

$$\sin \theta = \sin(90^\circ - \theta_0) = \cos \theta_0 = \beta_{13}. \quad (1.35)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_\theta &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & 0 & \beta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta_{13} & 0 & \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{B}\mathbf{A}_\psi^T \mathbf{A}_\theta^T &= \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & 0 & \beta_{13} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{23} \\ -\frac{\beta_{13}\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & 0 & -\beta_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta_{13} & 0 & \sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \left(\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}\right)^2 + \beta_{13}^2 & 0 & -\beta_{13}\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} + \beta_{13}\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \\ -\beta_{13}\beta_{23} + \beta_{13}\beta_{23} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{13}^2\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \beta_{23}\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \\ -\beta_{13}\beta_{33} + \beta_{13}\beta_{33} & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{13}^2\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} + \beta_{33}\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \\ 0 & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \end{pmatrix}. \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

Последняя матрица однозначно определяет угол крена  $\varphi$  (1.37),

$$\cos \varphi = \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}}, \tag{1.37}$$

то есть восстановление крена производится матрицей

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Умножая  $\mathbf{B}\mathbf{A}_\psi^T \mathbf{A}_\theta^T$  справа на  $\mathbf{A}_\varphi^T$  получаем единичную матрицу (1.38):

$$\mathbf{B}\mathbf{A}_\psi^T\mathbf{A}_\theta^T\mathbf{A}_\varphi^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \\ 0 & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & -\frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \\ 0 & \frac{\beta_{23}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} & \frac{\beta_{33}}{\sqrt{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta_{33}^2 + \beta_{23}^2}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & -\frac{\beta_{23}\beta_{33}}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} + \frac{\beta_{23}\beta_{33}}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \\ 0 & -\frac{\beta_{23}\beta_{33}}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} + \frac{\beta_{23}\beta_{33}}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} & \frac{\beta_{33}^2 + \beta_{23}^2}{\beta_{11}^2 + \beta_{12}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Таким образом, получаем выражение (1.39):

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_\varphi\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}_\psi, \quad (1.39)$$

### Заключение

Ориентация КА может быть определена как последовательно выполняемые вращения – крен, тангаж и рыскание.

Статья выполнена в рамках проекта грантового финансирования на 2022-2024 гг. ИРН АР148043/0222: «Разработка системы позиционирования наземных объектов по данным магнитного поля Земли с использованием технологии BigData».

### Список литературы

- 1 <http://geodesist.ru/threads/algorithmy-vychislenija-parametrov-magnitnogo-polja-zemli-s- ispo.6547/>
- 2 <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>
- 3 <http://www.ngdc.noaa.gov/ngdc.html>
- 4 <http://www.geomag.bgs.ac.uk/>
- 5 <http://naukarus.com/otsenki-tochnosti-nekotoryh-globalnyh-analiticheskikh-modeley-postoyannogo-magnitnogo-polya-zemli-s-pomoschyu-dannyh-gradi>.
- 6 Корепанов В.Е. SME-SAT – Кубсат для научных исследований Word Level of space

rocketry and Technology, Dnepropetrovsk p.55, 2013/Украина.

- 7 [https://www.aliexpress.com/item/PNI-RM3100-geomagnetism-sensor-module-high-accuracy-13156-13104-13101/32788633914.html?spm=2114.search0204.3.184.3fe456eaK8D6ZS&ws\\_ab\\_test=searchweb0\\_0.searchweb201602\\_2\\_10065\\_10068\\_10059\\_10884\\_10887\\_10696\\_100031\\_10084\\_10083\\_10103\\_10618\\_10307.searchweb201603\\_60.ppcSwitch\\_5\\_ppcChannel&algo\\_expid=a87e8643-5c7f-481b-b9e1-83d682de3c6c-29&algo\\_pvid=a87e8643-5c7f-481b-b9e1-83d682de3c6c&transAbTest=ae803\\_1&priceBeautifyAB=0](https://www.aliexpress.com/item/PNI-RM3100-geomagnetism-sensor-module-high-accuracy-13156-13104-13101/32788633914.html?spm=2114.search0204.3.184.3fe456eaK8D6ZS&ws_ab_test=searchweb0_0.searchweb201602_2_10065_10068_10059_10884_10887_10696_100031_10084_10083_10103_10618_10307.searchweb201603_60.ppcSwitch_5_ppcChannel&algo_expid=a87e8643-5c7f-481b-b9e1-83d682de3c6c-29&algo_pvid=a87e8643-5c7f-481b-b9e1-83d682de3c6c&transAbTest=ae803_1&priceBeautifyAB=0)

8 Ю. П. Цветков, О. М. Брехов, и др./ Оценки точности некоторых глобальных аналитических моделей постоянного магнитного поля Земли с помощью данных градиентных магнитных съемок на стратосферных аэростатах/геомагнетизм и аэрономия, 2014, том 54, № 2, с. 283-288.

Принято в печать 20.03.2022

