МРНТИ 50.00.01 https://doi.org/10.26577/JPEOS.2022.v24.i2.i7

Л.А. Алексеева

Института математики и математического моделирования, Казахстан, г. Алматы
**e-mail: alexeeva@math.kz*

БИКВАТЕРНИОННЫЕ ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА И ДИРАКА И СВОЙСТВА ИХ РЕШЕНИЙ

Аннотация. Используется дифференциальная алгебра бикватернионов для построения обобщенных решений бикватернионного волнового (*биволнового*) уравнения, частным случаев которых являются системы уравнений Максвелла и Дирака. Для построения решений и исследования их свойств используется метод обобщенных функций. Построены фундаментальные и обобщенные решения, аналог формулы Кирхгофа для волнового уравнения, которое дает решение задачи Коши. Получен динамический аналог формулы Гаусса, который дает решение биволнового уравнения в ограниченной области при известных граничных и начальных условиях на искомый бикватернион. Используя построенные аналоги формулы Кирхгофа и Грина, можно получить аналоги формулы Грина при ненулевых начальных условиях, разлагая решение уравнения (1) на два бикватерниона, один из которых удовлетворяет начальным условиям. Условия на границе для второго бикватерниона получим, используя граничные значения исходного бикватерниона и первого построенного. После этого формулы, аналогичные (30), дают интегральное представление второго бикватерниона. Поскольку уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, построенные решения могут использоваться для задач электродинамики и теории поля. Они могут использоваться в экспериментах, к примеру, полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая СГИУ. Построенные решения можно использовать в теории поля, элементарных частиц и электрогравимагнитных взаимодействий.

Ключевые слова: алгебра, бикватернион, биградиент, биволновое уравнение, обобщенное решение, ударные волны, преобразование Лоренца, уравнение Максвелла, уравнение Дирака, спинор, скалярный потенциал, стационарные колебания.

L.A. Alekseeva
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Kazakhstan, Almaty
**e-mail: alexeeva@math.kz*

Biquaternion generalizations of Maxwell's and Dirac's equations and properties of their solutions

Abstract. The differential algebra of biquaternions is used to construct generalized solutions of the biquaternion wave (biquaternion) equation, special cases of which are the systems of equations of Maxwell and Dirac. The method of generalized functions is used to construct solutions and study their properties. Fundamental and generalized solutions are constructed, an analogue of the Kirchhoff formula for the wave equation, which gives a solution to the Cauchy problem. A dynamic analog of the Gauss formula is obtained, which gives a solution to the biwave equation in a limited region under known boundary and initial conditions for the desired biquaternion. Using the constructed analogues of the Kirchhoff and Green's formula, one can obtain analogues of the Green's formula under nonzero initial conditions by decomposing the solution of Eq. (1) into two biquaternions, one of which satisfies the initial conditions. Conditions on the boundary for the second biquaternion will be obtained using the boundary values of the original biquaternion and the first constructed one. After that, formulas similar to (30) give an integral representation of the second biquaternion. Since the equations of

Maxwell and Dirac are a special case of biwave equations, the constructed solutions can be used for problems of electrodynamics and field theory. They can be used in experiments, so the field characteristics of EM fields at the boundary can be measured experimentally without solving the SHIE. The constructed solutions can be used in field theory, elementary particles and electro-gravimagnetic interactions.

Key words: algebra, biquaternion, bigradient, bi-wave equation, generalized solution, shock waves, Lorentz transformation, Maxwell equation, Dirac equation, spinor, scalar potential, stationary oscillations.

Л.А. Алексеева

Математика және математикалық модельдеу институты, Қазақстан, Алматы қ.

**e-mail: alexeeva@math.kz*

Максвелл және Дирак теңдеулерінің бикватерниондық қорытулары және олардың шешімдерінің қасиеттері

Аңдатпа. Бикватерниондардың дифференциалдық алгебрасы бикватерниондық толқын (бикватернион) теңдеуінің жалпыланған шешімдерін құру үшін қолданылады, оның ерекше жағдайлары – Максвелл және Дирак теңдеулер жүйесі. Жалпыланған функциялар әдісі шешімдерді құру және олардың қасиеттерін зерттеу үшін қолданылады. Коши есебінің шешімін беретін толқындық теңдеу үшін Кирхгоф формуласының аналогы іргелі және жалпылама шешімдер құрастырылды. Гаусс формуласының динамикалық аналогы алынған, ол белгілі шекара және қажетті бикватернион үшін бастапқы шарттарда шектеулі аймақта қос толқынды теңдеудің шешімін береді. Кирхгоф пен Грин формуласының құрастырылған аналогтарын пайдалана отырып, (1) теңдеудің шешімін екі бикватернионға ыдырату арқылы нөлге тең емес бастапқы шарттарда Грин формуласының аналогтарын алуға болады, олардың біреуі бастапқы шарттарды қанағаттандырады. Екінші бикватернион шекарасының шарттары бастапқы бикватерниондың және бірінші құрастырылғанның шекаралық мәндерін пайдалана отырып алынады. Осыдан кейін (30) ұқсас формулалар екінші бикватерниондың интегралды көрінісін береді. Максвелл және Дирак теңдеулері қос толқынды теңдеулердің ерекше жағдайы болғандықтан, құрастырылған шешімдер электродинамика мен өріс теориясының есептері үшін пайдаланылуы мүмкін. Оларды тәжірибелерде қолдануға болады, сондықтан шекарадағы ЭМ өрістерінің өріс сипаттамаларын SHIE шешпей-ақ, тәжірибе жүзінде өлшеуге болады. Құрылған шешімдерді өріс теориясында, элементар бөлшектерде және электрогравимагниттік әрекеттесулерде қолдануға мүмкіндік бар.

Түйін сөздер: алгебра, бикватернион, биградиент, екі толқынды теңдеу, жалпыланған шешім, соққы толқындары, Лоренц түрлендіруі, Максвелл теңдеуі, Дирак теңдеуі, спинор, скалярлық потенциал, стационар тербеліс.

Введение

В работах [1-3] представлены основы дифференциальной алгебры бикватернионов, которая очень удобна для решения широкого класса задач математической физики. С использованием дифференциальных операторов - взаимных комплексных градиентов (*биградиентов*), обобщающих понятие градиента на функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского, можно многие системы уравнений волновой динамики различных сред привести к решению одного дифференциального бикватернионного уравнения, решения которого можно построить намного легче, нежели искать решения эквивалентной ему системы дифференциальных уравнений восьмого порядка. К таким уравнения, в частности, относятся уравнения Максвелла и уравнения Дирака.

Здесь дифференциальная алгебра бикватернионов используется для построения обобщенных решений бикватернионного волнового (*биволнового*) уравнения более общего вида, чем в [1] и ряда краевых задач для него, частным случаев которых являются системы уравнений Максвелла и Дирака. Для построения решений используется метод обобщенных функций, основные идеи которого на примере классического волнового уравнения подробно изложены в [4-5] .

Биволновое уравнение

Рассмотрим на пространстве Минковского $\mathbf{M}$ бикватернионное волновое уравнение вида

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \quad (\tau,x)\in\mathbf{M} \quad , \quad (1)$$

где бикватернионы

$$\mathbf{B}=b(\tau,x)+B(\tau,x),$$

$$\mathbf{G}=g(\tau,x)+G(\tau,x),$$

Структурный коэффициент $\mathbf{F}=f+F$ - постоянный бикватернион.

Согласно кватернионному умножению

$$\begin{gathered}\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=(f+F)\circ(b+B)=\\=(fb-(F,B))+(fB+bF+[F,B])\end{gathered} . \quad (2)$$

Здесь и далее используем скалярно-векторную запись бикватернионов, используя для скаляра одноименные строчные буквы, а для вектора – прописные курсивом, скалярное и векторное произведение указанных векторов,

$$(F,B)=\sum_{j=1}^{3}F_jB_j,$$

$$[F,B]=\sum_{k,l,m=1}^{3}\varepsilon_{klm}F_kB_l\,e_m,$$

ε_{klm} -псевдо-тензор Леви-Чивита, e_m – базисные орты.

Бикватернионы $\mathbf{B}(\tau,x),\mathbf{G}(\tau,x)$ принадлежат $\mathbf{B}'(\mathbf{M})$ - пространству *обобщенных бикватернионов* на пространстве Минковского $\mathbf{M}$. Под таковыми понимаем бикватернионы, компоненты которых принадлежат классу обобщенных функций медленного роста [6].

Рассмотрим *взаимные биградиенты* - дифференциальные бикватернион-ные операторы вида:

$$\nabla^{+}=\partial_\tau+i\nabla\ , \quad \nabla^{-}=\partial_\tau-i\nabla\ ,$$

действие которых на $\mathbf{B}(\tau,x)$ определяется алгеброй бикватернинов :

$$\begin{gathered}\nabla^{\pm}\mathbf{B}=\left(\partial_\tau\pm i\nabla\right)\circ\left(b(\tau,x)+B(\tau,x)\right)=\\=\left(\partial_\tau b\mp i\operatorname{div}B\right)+\partial_\tau B\pm i\operatorname{grad}b\pm i\operatorname{rot}B\end{gathered} \quad (3)$$

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида:

$$\mathbf{A}\circ\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}=\mathbf{H}(\tau,x), \quad (4)$$

которые приводятся к (1), если существует $\mathbf{A}^{-1}$ [1]. В этом случае, умножая (2) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получим уравнение (1), где

$$\mathbf{F}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{C},\ \mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{H}\ .$$

Ранее автором рассмотрены частные случаи, когда скаляр либо вектор. В [1-3] показано, что уравнение (1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла при $\mathbf{F}=0$, в [7-8] уравнениям Дирака при чисто мнимом $\mathbf{F}=i\rho$. В этих работах, с использованием теории обобщенных функций, построены элементарные и общие решения (1), описывающие нестационарные, гармонические по времени и статические бикватернионные поля. Отметим также, что кватернионное представление системы уравнений Максвелла имеет довольно обширную библиографию, в отличие от работ по построению общего решения кватернионных и бикватернионных аналогов этой системы.

Построим обобщенные решения (1) при произвольной правой части $\mathbf{G}(\tau,x)\in\mathbf{B}'(\mathbf{M})$.

Неоднородное биволновое уравнение и его решения

Введем дифференциальные бикватерни-онные операторы:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}=\nabla^{+}+\mathbf{F}=\nabla^{+}+f+F,$$

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}=\nabla^{-}+\mathbf{F}^{-}=\nabla^{-}+f-F \quad ,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи. В связи с вышеизложенным, назовем эти операторы *взаимные МД-операторы* (операторы Максвелла-Дирака). Используем далее обозначение для классического волнового оператора – *даламбертиана:*

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \Delta, \qquad (3)$$

$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$ - *лаплассиан.*

Взаимные биградиенты и МД-операторы обладают очень полезными для приложений свойствами.

Л е м м а 1. *Композиции взаимных биградиентов и МД-операторов равны:*

$$\nabla^+\nabla^- = \nabla^-\nabla^+ = \square \qquad (4)$$

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^- = \mathbf{D}_\mathbf{F}^- \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ =$$

$$= \square + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) - 2i(F,\nabla)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Действительно

$$\nabla^+\nabla^- \triangleq (\partial_\tau + i\nabla)\circ(\partial_\tau - i\nabla) =$$

$$= \partial_\tau\partial_\tau - (\nabla,\nabla) - i\partial_\tau\nabla + i\partial_\tau\nabla - [\nabla,\nabla] =$$

$$= \nabla^- \circ \nabla^+ = \square$$

Аналогично получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^- = \mathbf{D}_\mathbf{F}^- \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ =$$

$$= \left(\nabla^+ + f + F\right)\circ\left(\nabla^- + f - F\right) =$$

$$= \square + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla).$$

Далее значок кватернионного умножения между операторами будем убирать:

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\mathbf{D}_\mathbf{F}^- \triangleq \mathbf{D}_\mathbf{F}^+ \circ \mathbf{D}_\mathbf{F}^- .$$

Построим решения уравнения (1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\mathbf{B} = \mathbf{G}(\tau,x), \qquad (\tau,x)\in \mathrm{M}. \qquad (5)$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже, либо просто используя операцию комплексного сопряжения. Используя свойство (3), из (5) получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\mathbf{B} =$$

$$= \left\{\square + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\}\mathbf{B} =$$

$$= \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{G} \triangleq \mathbf{Q}$$

Т.е. каждая компонента **B** удовлетворяет уравнению

$$\square u + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla u) + f^2 u + (F,F)u = q(\tau,x) \qquad (6)$$

с соответствующей **Q** правой частью. Заметим, что это уравнение, если положить $m^2 = f^2 + (F,F)$, содержит оператор Клейна-Гордона-Фока $\left(\square + m^2\right)$, а также дополнительное слагаемое: $2f\partial_\tau + 2i(F,\nabla)$. Если $f=ik$ – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шредингера $\left(2ik\partial_\tau - \Delta\right)$. И хотя уравнение (4) имеет более сложный вид, чем уравнения названных авторов, его решения, как покажем далее, определяются более простыми, на наш взгляд, функциями.

Теорема 1. *Решение биволнового уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\left(\psi * \mathbf{G}\right) = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi * \mathbf{G} + \mathbf{B}^0 = \psi * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{G} + \mathbf{B}^0 \qquad (7)$$

где $\psi(\tau,x)$-- *фундаментальное решение уравнения* (6) (*при* $q = \delta(\tau)\delta(x)$), *а* $\mathbf{B}^0(\tau,x)$ *решение однородного уравнения* (5) (*при* $\mathbf{G}\equiv\mathbf{0}$):

$$\mathbf{B}^0 = \sum_{\psi^0}\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi^0 * \mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0}\psi^0 * \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{C}^0 = \sum_{\psi^0}\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\left(\psi^0 * \mathbf{C}^0\right) \qquad (8)$$

$\psi^0(\tau,x)$- *решения однородного уравнения* (6) (*при* $q=0$), $\mathbf{C}^0 \in B'(M)$ - *произвольные бикватернионы, допускающие такую свертку.*

Доказательство. В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (5). Подставим первое слагаемое в уравнение (5) и, используя (3) и свойство дифференцирования свертки, получим

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\left(\psi * \mathbf{G}\right) =$$

$$= \left\{\square\psi + 2f\partial_\tau\psi + f^2\psi + (F,F)\psi + 2i(F,\nabla\psi)\right\} * \mathbf{G} =$$

$$= \delta(\tau)\delta(x) * \mathbf{G} = \mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем

$$\mathbf{D}_\mathbf{F}^-\mathbf{D}_\mathbf{F}^+\left(\psi^0 * \mathbf{C}^0\right) =$$

$$= \left\{\Box + 2f\partial_\tau + f^2 + (F,F) + 2i(F,\nabla)\right\}\psi^0 * \mathbf{C}^0 =$$

$$= 0.$$

Очевидно, в силу линейности уравнения (1), любое решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах теоремы (7) и (8) для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления сверток, что зависит от конкретного вида входящих в свертку функций.

Следовательно, класс решений биволнового уравнения (5) определяется скалярными функциями $\psi(\tau,x)$ и $\psi^0(\tau,x)$ - решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными потенциалами* биволнового уравнения (5) и (1).

1. Построение бифункции Грина биволнового уравнения

Рассмотрим фундаментальные решения уравнения (1):

$$\nabla^{\pm}\mathbf{U} + \mathbf{F} \circ \mathbf{U} = \delta(\tau)\delta(x), \qquad (7)$$

здесь справа сингулярная дельта-функция. Фундаментальные решения определяются с точностью до решений однородного биволнового уравнения (с нулевой правой частью).

О п р е д е л е н и е. Назовем *бифункцией Грина* фундаментальное решение уравнения (7), удовлетворяющее следующим условиям излучения:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\tau,x) &= 0 \quad \textit{при } \tau < 0, \\ \mathbf{U}(\tau,x) &= 0 \quad \textit{при } \|x\| > \tau \end{aligned} \qquad (8)$$

Свойства фундаментальных решений позволяют строить частные решения неоднородного биволнового уравнения (1) в виде функциональной свертки:

$$\mathbf{B} = \mathbf{G} * \mathbf{U} = \quad (g+G)*(u+U) =$$

$$= \left\{g*u - \sum_{k=1}^{3} G_k * U_k\right\} +$$

$$+ \left\{u*G + g*U + \sum_{j,k,l=1}^{3} \varepsilon_{jkl} e_j\left(G_k * U_l\right)\right\}$$

(9)

где в правой части стоять покомпонентные свертки, которые следует брать согласно правилам теории обобщенных функций [6]. Условия существования таких сверток определяют класс бикватернионов в правой части (1), для которых решения уравнения существуют.

Используя формулу теоремы (1), построим фундаментальные решения уравнения (7):

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\tau,x) &= \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\left(\psi * \delta(\tau)\delta(x)\right) = \\ &= \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi + \mathbf{B}^0 = \mathbf{D}_\mathbf{F}^-\psi + \mathbf{B}^0 \end{aligned} \qquad (10)$$

Здесь использовали свойство сверток с дельта-функцией [6]: $\psi * \delta = \psi$.

2. Функция Грина КГФШ-уравнения

Для построения функции Грина биволнового уравнения построим функцию Грина для КГФШ-уравнения, которая удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Box\psi + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla\psi) + f^2\psi + (F,F)\psi &= \\ = \delta(\tau)\delta(x) \end{aligned}$$

(11)

и условиям излучения, аналогичным (8).

$$\begin{aligned} \psi(\tau,x) &= 0 \quad \textit{при } \tau < 0, \\ \psi(\tau,x) &= 0 \quad \textit{при } \|x\| > \tau \end{aligned} \qquad (12)$$

Теорема 2. *Скалярный потенциал бифункции Грина уравнения* (11) *представим в виде:*

$$\psi = \frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau - \|x\|\right), \qquad (13)$$

где $\delta(\tau - \|x\|)$ -- *сингулярная обобщенная функция* - *простой слой на световом конусе* $\|x\| = \tau$.

Доказательство. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций [6]. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ,x) обозначаем (ω,ξ) соответственно. Рассмотрим преобразование Фурье уравнения (1):

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F,\xi) + f^2 + (F,F)\right)\bar{\psi} =$$
$$= 1$$

которое можно записать в виде:

$$\left\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\right\}\bar{\psi} = 1$$

Откуда получим

$$\bar{\psi}(\omega,\xi)=\frac{1}{\left(\xi+F,\xi+F\right)-(\omega+if)^2}$$

(14)

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$\Box\chi=\delta(x,t)$,

удовлетворяющем условиям излучения (12), которое имеет вид :

$$\chi(x,\tau)=\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right).$$

Здесь справа стоит сингулярная обобщенная функция – простой слой на световом конусе $\tau=\|x\|$. Его преобразование Фурье равно следующей регуляризации функции $\left(\|\xi\|^2-\omega^2\right)^{-1}$

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)\right]=\frac{1}{\|\xi\|^2-\left(\omega+i0\right)^2}$$

(15)

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [6], из (14) и (15) следует формула теоремы (13). Теорема доказана.

Заметим, что ψ -- сингулярная обобщенная функция, носителем которой является трехмерная расширяющаяся со временем сфера, т.е. сферическая расходящаяся волна, распростра-няющаяся в R^3 с единичной скоростью (τ - время).

Бифункция Грина и обобщенные решения биволнового уравнения

Используя (10) и формулу теоремы 2 теперь можем дать представление функции Грина для вычислений. Соответственно, используя формулу для обобщенного решения (7), получим представление обобщенного решения:

$$\mathbf{U}(\tau,x)=\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}=$$

$$=\left(\partial_\tau-i\nabla+\mathbf{F}^-\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}=$$

$$=\left(\partial_\tau-i\nabla\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}+$$

$$+\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}\mathbf{F}^-$$

где $\mathbf{F}^-=f-F$. Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. *Бифункция Грина биволнового уравнения* (1) *имеет вид:*

$$\mathbf{U}=\left(\partial_\tau-i\nabla\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}+\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}\mathbf{F}^- \qquad (16)$$

а его общее решение представимо в виде

$$\mathbf{B}=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)*\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{G}+\mathbf{B}^0 \qquad (17)$$

где $\mathbf{B}^0$ - *решение однородного уравнения - имеет вид* (8). *При* $\mathbf{B}^0=0$ *это решение описывает расходящиеся волны, порождаемые источником* $\mathbf{G}$.

Для регулярных бикватернионов

$$\mathbf{K}(\tau,x)=k+K=\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{G}(\tau,x)=$$

$$=\left(\partial_\tau-i\nabla\right)(g+G)+(f-F)\circ(g+G)=$$

$$=\left(\partial_\tau g+fg+(F,G)+i\,\mathrm{div}G\right)-$$

$$-i\nabla g+\partial_\tau G-i\,\mathrm{rot}G+fG-gF-[F,G]$$

формула (17) представима в интегральном виде:

$$\mathbf{B}(\tau,x)=$$

$$=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)*(k+K)+\mathbf{B}^0=$$

$$=\int_{\|x-y\|<\tau}\frac{e^{-i(F,x-y)-\|x-y\|f}}{4\pi\|x-y\|}\mathbf{K}(y,\tau-\|x-y\|)dy_1dy_2dy_3+$$

$$+\mathbf{B}^0$$

(18)

Для сингулярных для вычисления сверток следует использовать определение сверток в пространстве обобщенных функций [6].

Аналог формулы Кирхгофа для решений биволнового уравнения

Так мы называем решение задачи Коши для биволнового уравнения, по аналогии с формулами Кирхгофа - представлением решений волнового уравнения при заданных начальных данных в трехмерном пространстве [7].

Здесь начальные условия имеют вид:

$$\mathbf{B}(0,x)=\mathbf{B}0(x) \qquad (19)$$

где бикватернион начальных данных $\mathbf{B}0(x)$-- регулярный бикватернион, компоненты которого принадлежат классу непрерывных дифференцируемых функций. Предположим, что его носитель ограничен:

$$\operatorname{supp}\mathbf{B}0(x)\in\left\{x:\|x\|<a\right\}=Ш_a \qquad (20)$$

Требуется построить решение этой задачи, удовлетворяющее условию излучения:

$$\mathbf{B}(\tau,x)=0 \quad при \quad \|x\|>\tau+a \qquad (21)$$

Для построения решения задачи Коши используем метод обобщенных функций.

Рассмотрим уравнение (1) на пространстве обобщенных бикватер-нионов с носителем на положительной оси времени, которые представим в виде

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=\mathbf{B}(\tau,x)H(\tau),$$

где $\mathbf{B}(\tau,x)$- решение задачи Коши, $H(\tau)$-функция Хевисайда. В этом пространстве получим

$$\nabla^+\hat{\mathbf{B}}+\mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}}=$$

$$=\left(\nabla^+\mathbf{B}+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}\right)H(\tau)+\mathbf{B}0(x)\delta(\tau)$$

$$=\mathbf{G}(\tau,x)H(\tau)+\mathbf{B}0(x)\delta(\tau),$$

Используя свойство функции Грина, представим решение в виде свертки функции Грина с правой частью

$$\mathbf{B}(\tau,x)=$$

$$=\mathbf{U}*\mathbf{G}(\tau,x)H(\tau)+\mathbf{U}*\mathbf{B}0(x)\delta(\tau)$$

$$=\mathbf{U}*\mathbf{G}(\tau,x)H(\tau)+$$

$$+\left(\partial_\tau-i\nabla\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}*\mathbf{B}0(x)\delta(\tau)+$$

$$+\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta\left(\tau-\|x\|\right)\right\}\mathbf{F}^-*\mathbf{B}0(x)\delta(\tau)=$$

$$=\mathbf{U}*\mathbf{G}(\tau,x)H(\tau)+$$

$$+\left(\partial_\tau-i\nabla\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}\left(x\right)\underset{x}{*}\mathbf{B}0(x)\right\}=$$

$$=\hat{\mathbf{B}}_1(\tau,x)+\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x)$$

(22)

Здесь первое слагаемое справа, с учетом условий излучения, имеет вид:

$$\mathbf{B}_1(\tau,x)=$$

$$=\int_{\|x-y\|<\tau}\frac{e^{-i(F,x-y)-\|x-y\|f}}{4\pi\|x-y\|}\mathbf{K}(y,\tau-\|x-y\|)dy_1dy_2dy_3$$

(23)

где $\delta_{S_\tau}\left(x\right)$ - простой слой на сфере S_τ радиуса τ: $S_\tau=\{x:\|x\|=\tau\}$.

*В*торое слагаемое $\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x)$, содержащее неполную свертку только по x, равно

$$\hat{\mathbf{B}}_2(\tau,x)=$$

$$=\left(\partial_\tau - i\nabla\right)\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}\left(x\right)\underset{x}{*}\mathbf{B}0(x)\right\}=$$

$$=\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\partial_\tau\left(\delta_{S_\tau}\left(x\right)*\mathbf{B}0(x)\right)\right\}-$$

$$-i\left\{\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta_{S_\tau}\left(x\right)\underset{x}{*}\nabla\mathbf{B}0(x)\right\}=$$

$$=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int\limits_{\|x-y\|\le\tau}\mathbf{B}0(x-y)dy_1dy_2dy_3\right)-$$

$$-i\int\limits_{\|x-y\|=\tau}\frac{e^{-i(F,x-y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}\nabla\mathbf{B}0(y)dy_1dy_2dy_3=$$

$$=\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\left(\int\limits_{\|x-y\|=\tau}b0(x-y)+B0(x-y)dS(dy)\right)+$$

$$+ie^{-i(F,x)}\int\limits_{\|x-y\|=\tau}\frac{e^{i(F,y)-f\|x-y\|}}{4\pi\|x-y\|}(\operatorname{div}B0(y)-\operatorname{rot}B0(y))dS(dy)$$

(24)

Здесь интегралы поверхностные, берутся на сфере радиуса τ с центром в точке x.

Формулы (22)-(24) являются аналогом формулы Кирхгофа задачи Коши для биволнового уравнения (1).

Динамический аналог формулы Грина

Под таковым мы понимаем представление решения биволнового урав-нения с нулевыми начальными данными в ограниченной открытой области $S^-\subset R^3$ по его граничным значениям на границе S, по аналогии с представлением решений уравнения Лапласа по граничным значениям его решений и производных [6]. Для этого используем характеристическую функцию этой области $H_S^-(x)$ и введем обобщенный бикватернион

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=\mathbf{B}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau),$$

равный решению этого уравнения с нулевыми начальными условиями в этой области с ее границей $\mathbf{B}(\tau,x)$, а вне их равный нулю. Частные производные этого бикватерниона в $\mathbf{B}'(\mathbf{M})$ равны:

$$\partial_\tau\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\tau}H_S^-(x)H(\tau)-\mathbf{B}0H_S^-(x)\delta(\tau)$$

$$\partial_j\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=$$

$$=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_j}H_S^-(x)H(\tau)-\mathbf{B}_S(\tau,x)n_j(x)\delta_S(x)H(\tau)$$

(25)

Здесь первые слагаемые справа – классические частные производные бикватерниона, сингулярная обобщенная функция $n_j(x)\delta_S(x)$- простой слой на на поверхности S, $n(x)=(n_1,n_2,n_3)$ внешняя единичная нормаль на границе, $\mathbf{B}_S(\tau,x)$ значения $\mathbf{B}(\tau,x)$ на S.

С учетом (25) и нулевых начальных условий ($\mathbf{B}0(x)=0$), действие биградиентов на этот бикватернион имеет вид:

$$(\partial_\tau\pm i\nabla)\hat{\mathbf{B}}=$$

$$=\left\{\left(\partial_\tau b\mp i\operatorname{div}B\right)\pm\left(i\operatorname{grad}b+\partial_\tau B\right)\right\}H_S^-(x)H(\tau)+$$

$$\pm\operatorname{rot}BH_S^-(x)H(\tau)+$$

$$+\left\{\pm i(n(x),B)\mp bn(x)\mp[n(x),B]\right\}\delta_S\left(x\right)H\left(t\right)$$

(26)

Тогда действие МД-операторов на этот бикватернион в пространстве обобщенных бикватернионов, с учетом (1) и (26)

$$\mathbf{D}^\pm\hat{\mathbf{B}}(\tau,x)=$$

$$=\nabla^\pm\hat{\mathbf{B}}+\mathbf{F}\circ\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau)\pm$$

$$\pm i\left\{(n(x),B_S)-b_Sn(x)-[n(x),B_S]\right\}\delta_S\left(x\right)H\left(t\right)$$

(27)

Обозначим $\hat{\mathbf{G}}(\tau,x)=\mathbf{G}(\tau,x)H_S^-(x)H(\tau)$, и введем, соответственно знаку, сингулярные граничные бикватернионы

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}^\pm(\tau,x)=\mathbf{\Gamma}^\pm(\tau,x)(\tau,x)\delta_S\left(x\right)H\left(t\right)=$$

$$=\left\{\pm i(n(x),B_S)\mp b_Sn(x)\mp[n(x),B_S]\right\}\delta_S\left(x\right)H\left(t\right)$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}^\pm(\tau,x)$- плотность простого слоя на пространственно-временном цилиндре: $\tau \geq 0,\, x \in S.$ В результате приходим к уравнению вида:

$$\mathbf{D}^{\pm}\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \nabla^{\pm}\hat{\mathbf{B}} + \mathbf{F} \circ \hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{G}}(\tau, x) + \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\pm}(\tau, x)$$

Решение этого уравнения имеет вид бикватернионной свертки правой части с функцией Грина:

$$\hat{\mathbf{B}}(\tau, x) = \mathbf{U}^{\pm} \circ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{U} \circ \hat{\mathbf{G}}(\tau, x) + \mathbf{U} \circ \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\pm}(\tau, x) \qquad (28)$$

Первое слагаемое справа вычисляется по формуле:

$$\hat{\mathbf{B}}_1(\tau, x) = \mathbf{U}^{\pm} * \hat{\mathbf{G}}(\tau, x) =$$

$$= (u + U) * (\hat{g} + \hat{G}) =$$

$$= \left(u * \hat{g} - \sum_{k=1}^{3} U_k * \hat{G}_k \right) + \sum_{k=1}^{3} \left(u * \hat{G}_k + \hat{g} * U_k \right) e_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} e_k \sum_{l,m=1}^{3} \varepsilon_{klm} (U_l * \hat{G}_m)$$

где покомпонентные свертки берутся согласно определению сверток в пространстве обобщенных функций [6]. Для регулярных $\hat{\mathbf{G}}(\tau, x) = \mathbf{G}(\tau, x)$ они имеют следующее интегральное представление:

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{U}^{\pm} * \hat{\mathbf{G}}(\tau, x) =$$

$$= \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{\mp} \left\{ \frac{e^{-(f\|x-y\| \pm i(F, x-y))}}{4\pi\|x\|} \delta\left(\tau - \|x\|\right) * \hat{\mathbf{G}} \right\} =$$

$$= \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{\mp} \int\limits_{\|x-y\| \leq \tau} \frac{e^{-(f\|x-y\| \pm i(F, x-y))}}{4\pi r(x, y)} \mathbf{G}(\tau - r(x, y), y) H_S^{-}(y) dy_1 dy_2 dy_3$$

$$r(x, y) = \|x - y\| \qquad (29)$$

Вычисляя второе слагаемое, получим

$$\hat{\mathbf{B}}_2(\tau, x) = \mathbf{U} * \hat{\mathbf{\Gamma}}^{\pm}(\tau, x) =$$

$$= \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{\mp} \left\{ \frac{e^{-(f\|x-y\| + i(F, x-y))}}{4\pi\|x\|} \delta\left(\tau - \|x\|\right) \right\} *$$

$$* \left\{ \pm i(n(x), B_S) \mp b_S n(x) \mp [n(x), B_S] \right\} \delta_S\left(x\right) H\left(t\right) =$$

$$= \pm \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{\mp} \int_S \frac{i(n(y), B_S(\tau - r(x, y), y)) - b_S(\tau - r(x, y), y) n(y)]}{4\pi r(x, y) \exp(\, f r(x, y) + i(F, x - y))} dS(y) \mp$$

$$\mp \mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{\mp} \int_S \frac{[n(x), B_S(\tau - r(x, y), y)]}{4\pi r(x, y) \exp(\, f r(x, y) + i(F, x - y))} dS(y), \qquad (30)$$

Здесь нужно вначале взять интегралы, а затем подействовать на полученный бикватернион МД-оператором.

Формулы (28)-(30) являются аналогом формулы Грина. Она позволяет вычислить бикватернион внутри области по его граничным значениям.

Заключение

Используя построенные аналоги формулы Кирхгофа и Грина, можно получить аналоги формулы Грина при ненулевых начальных условиях, разлагая решение уравнения (1) на два бикватерниона, один из которых удовлетворяет начальным условиям. Формулы (23)-(24) дают его представление с учетом действующих источников. Условия на границе для второго бикватерниона получим, используя граничные значения исходного бикватерниона и первого построенного. После этого формулы, аналогичные (30), дают интегральное представление второго бикватерниона.

Заметим, что все интегралы и их производные существуют только при $x \notin S$. Для граничных точек сами интегралы слабо сингулярные, сходящиеся, а вот их производные таковыми не являются. Здесь наблюдаются те же особенности, что и у решений волнового уравнения (см.[4]). Исследование интегральных представлений бикватерниона на границе позволяет получить граничные сингулярные интегральные уравнения для решении начально-краевых задач для биволновых уравнений и корректно поставить краевые условия на границе для построения их решений. Это можно сделать предельным переходом по $x \notin S$ в аналоге формулы Грина к границе *S*.

Поскольку уравнения Максвелла и Дирака являются частным случаем биволновых уравнений, построенные решения могут использоваться для задач электродинамики и теории поля. Они могут использоваться в экспериментах, так полевые характеристики ЭМ-полей на границе можно измерить экспериментально, не решая СГИУ.

Отметим здесь также, что бикватернионным представлением уравнений Максвелла и Дирака стали активно заниматься последние 20 лет. Имеется достаточно обширная библиография в этом направлении [11-20]. Однако решения бикватернионных краевых задач в ограниченных областях с произвольной геометрией автору неизвестны. В статье автора [21] разработан метод обобщенных функций для решения периодических по времени краевых задач в ограниченных областях для бикватернионного представления обобщенного уравнения Дирака.

Заметим также, что трансформация электро-гравимагнитных зарядов и токов под действием внешних электро-гравимагнитных полей описывается бикватернионными дифференциальными уравнениями типы (1) (см. [9-10]). Построенные здесь решения можно использовать для решения краевых задач в таких полях.

Список литературы

1. Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations **//** Int.J**.** *Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications.* – 2012. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 19-39
2. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 1. Преобразования Лоренца // Математический журнал. – 2010. – Т. 10. – №.1. – С. 33-41.
3. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 2. Обобщенные решения биволновых уравнений//Математический журнал. – 2010. – Т. 10. – № 3. – С. 5-13.
4. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. – Т. 6. – №1(19). – 2006. – С. 16-32.
5. Alexeyeva L.A. Boundary integral equations of nonstationary BVP for wave equations // X Int. Congress of Mathematicians, Madrid, 2006, Spain. – Abstracts. – P. 436.
6. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 512 p.
7. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. 3. Уравнение Дирака и его обобщенные решения //*Математический журнал*. – Т. 11(2011). – 1. – С. 30-38.
8. Alexeyeva L.A. Differential algebra of biquaternions. Dirac equations and its generalized solutions . - In book “Progress in analysis”. – M., 2013. - Proceedings of the 8th Congress of ISAAC. – Moscow.-Aug 22-27. - 2011. – P.153-161
9. Alexeyeva L.A. Newton’s laws for a biquaternionic model of the electro-gravimagnetic fields, charges, currents, and their interactions // *Journal of Physical Mathematics*. – 2009. – Vol. 1. – Article ID S090604, 15 pages. doi:10.4303/jpm/S090604
10. Alexeyeva L.A. Biquaternionic Form of Laws of Electro-Gravimagnetic Charges and Currents Interactions // *Journal of Modern Physics.* – 2016. – Vol. 7. – Pp. 1351–1358.
11. Hamilton W. R. On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions // Procee-dings of the Royal Irish Academy (Nov 13, 1843), 424–434.
12. Edmonds J.D. Eight Maxwell equations as one quaternionic // Amer. J. Phys., 46 (1978), No. 4, 430.
13. Шпилькер Г.Л. Гиперкомплексные решения уравнений Максвелла // ДАН СССР, 272 (1983), № 6, 1359-1363
14. Rodrigues, W. A., Jr., Capelas de Oliviera E. Dirac and Maxwell equa-tions in the Clifford and spinClifford bundles // Int. Journal of Theoretical Physics, 29 (1990), 397–412.
15. Finkelstein D., Jauch J. M., Schiminovich S., Speiser D. Foundations of quaternion quantum mechanics // J. Math. Phys., 3 (1992), 207–220.
16. Adler S. L. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields. – New York: Oxford University Press, 1995.
17. De Leo S., Rodrigues Jr. W. A. Quaternionic quantum mechanics: from complex to complexified [18]8 quaternions // Int. J. Theor. Phys., 36 (1997), 2725–2757.
18. Ефремов А.П. Кватернионы: алгебра, геометрия и физические теории// Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 1(2004), №1, 111-127.

19. Acevedo M., Lopez-Bonilla J., Sanchez-Meraz M. Quaternions, Maxwell Equations and Lorentz Transforma-tions // Apeiron, 12 (2005), No. 4 , 371.
20. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда. – Москва-Ижевск, 2009. – 362 с.
21. Alexeyeva L.A. Generalized solutions of stationary boundary value problems for biwave equations // Differential Equations, 2022, Vol. 58, No. 4, pp. 475–487.

Принято в печать 24.11.2022