МРНТИ 27.19.19; 27.19.21; 27.35.33; https://doi.org/10.26577/JPEOS.2022.v24.i2.i4

В.В. Проняев
ООО «Цвет», Россия, г. Воронеж
e-mail: orion22@box.vsi.ru

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ И ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ С ПОЗИЦИИ МОДЕЛЕЙ ИЗ РАЗНЫХ РАЗДЕЛОВ МАТЕМАТИКИ

Аннотация. С задействованием разных разделов математики: торических действий в топологии и комбинаторике, приближение функции двух переменных суммой произведений функции одного переменного в пространствах Соболева, бесконечнократных пространств петель при рассмотрении трансфера, теоремы Гротендика-Римана-Роха для неособых многообразий и др., рассматривая соответствующие их некоторые объекты с позиции моделей, показано, что эти модели при сопоставлении с состоянием системы с максимальной энтропией, соответствующей принципу наименьшего действия, весьма убедительно коррелируются между собой. Поэтому цель данной статьи – показать подобие взаимодействия соответствующих объектов в термодинамике, механике и математике. При этом эта цель может привести к некоторым Приложениям более детального изучения различных динамических систем, где от соответствующих моделей можно перейти к написанию алгоритмов и далее к написанию программ, например, при рассмотрении взаимодействия геодинамических составляющих Земли (атмосферы, её верхнего слоя – ионосферы). В заключение формулируется, что при рассмотрении динамических систем, с позиции их более детального изучения, необходимо именно «взаимопроникновение» различных областей математических знаний, где принцип максимума энтропии соответствует принципу наименьшего действия и эти принципы должны выступать с позиции некоторого «регулятора».

Ключевые слова: подобие, регулятор, принцип наименьшего действия, максимум, энтропия, модельное, предложение.

V.V. Pronyaev
SLL " Zvet", Russia, Voronezh
e-mail: orion22@box.vsi.ru

The principle of maximum entropy and the principle of minimum influence from the position of models in different sections

Abstract. With involvement of different sections of mathematics: the tor of operations in topology and a theory of combinations, an approximation of function of two variables by the sum of products of function of one variable Soboleva in spaces, infinite-to-one spaces of loops when reviewing a transfer, the theorem of Grotendika-Rimana-Rokha for nonspecial varieties, etc., consider some plants correspond them with a position of models, it are show that these models by comparison with a condition of system with the maximum entropy correspond to a principle of least action, was rather convincingly correlat among themselves. Therefore the purpose of the paper - to show a similarity of interaction of correspond plants in thermodynamics, a mechanics and mathematics. Thus, this purpose, could lead to some Applications of more detailed study of various dynamic systems where from correspond models it are possible to pass to a writing of algorithms and further to a writing of programs. For example when reviewing interaction of geodynamic components of the Earth (atmospheres, was more its than the upper stratum - ionospheres). In the Inference it are formulate that when reviewing dynamic systems, with a position are more their than more detailed study, "interosculation" of various areas of mathematical knowledge where the maximum principle of an entropy corresponded to a principle of least action are necessary and these principles should appear with a position of some "governor".

Key words: similarity, governor, principle least, operations, maxima, entropy, modelling, sentence.

В.В. Проняев
ООО «Цвет», Ресей, Воронеж қ.
e-mail: orion22@box.vsi.ru

Максималды энтропия принципі және әртүрлі секциялардағы модельдер позициясынан ең аз әсер ету принципі

Аңдатпа. Математиканың әртүрлі салаларының қатысуымен: топология мен комбинаторикадағы торикалық әрекеттер, екі айнымалы функцияның Соболев кеңістігіндегі бір айнымалы функция туындыларының қосындысына жақындау, тасымалдауды қарастыру кезінде шексіз циклдік кеңістіктер, Гротендик-Риман-Рох теоремасын сингулярлы емес коллекторлары және т.б., олардың кейбір сәйкес объектілерін модельдер тұрғысынан қарастыра отырып, бұл модельдер ең аз әсер ету принципіне сәйкес келетін максималды энтропиясы бар жүйенің күйімен салыстырғандағы әрекет бір-бірімен өте сенімді корреляцияланатыны көрсетілген. Сондықтан бұл мақаланың мақсаты – термодинамика, механика және математикадағы сәйкес объектілердің өзара әрекеттесуінің ұқсастығын көрсету. Сонымен қатар бұл мақсат әртүрлі динамикалық жүйелерді егжей-тегжейлі зерттеудің кейбір қосымшаларына әкелуі мүмкін, мұнда сәйкес модельдерден алгоритмдерді жазуға, содан кейін бағдарламаларды жазуға көшуге болады. Мысалы, Жердің геодинамикалық компоненттерінің (атмосфера, оның жоғарғы қабаты – ионосфера) өзара әрекеттесуін қарастыру. Қорытындылай келе, динамикалық жүйелерді қарастыру кезінде оларды неғұрлым егжей-тегжейлі зерттеу тұрғысынан математикалық білімнің әртүрлі салаларының «араласуы» қажет, мұнда максималды энтропия принципі ең аз әрекет ету принципіне сәйкес келеді және бұл принциптер қандай да бір «реттеуші» позициясында әрекет етуі керек.

Түйін сөздер: ұқсастық, реттеуші, принцип, ең аз, әрекет, максимум, энтропия, модель, ұсыныс.

Введение

В недавно вышедшей статье [1], показано, что состояние системы с максимальной энтропией соответствует известному принципу наименьшего действия. В смысле — принцип максимума энтропии равновесной системы в термодинамике следует из ключевого принципа классической механики (второй закон термодинамики есть следствие законов механики). При этом рассматривается расширение канонического принципа наименьшего действия для неравновесных систем. На примере атмосферы Земли, рассматривается процесс установления стационарного состояния в неравновесной системе. Напомним, что при движении системы, принцип наименьшего действия возникает в связи с тем, что в каждой точке траектории, активная сила равна по величине и противоположна направлению инерциальной силе. При этом, работа совершается внешними силами по перемещению системы вдоль соответствующей траектории — минимальна. Замкнутая система в равновесном состоянии имеет максимальную энтропию.

В данной статье, с привлечением математических представлений из разных разделов, будет показано, что взаимоотношение соответствующих объектов, рассматривая их с позиции моделей — весьма убедительно коррелируется при сопоставлении с состоянием системы, где максимальная энтропия соответствует известному принципу наименьшего действия. Другими словами — имеем некоторое подобие (или аналогии) логических «ходов», обеспечивающих это соответствие.

В последнее время, формируется область исследований, богатой фундаментальными результатами и важными приложениями на основе «взаимопроникновения» идей, методов и достижений из различных разделов математических знаний. Это — комбинаторная геометрия и топология, алгебраической топологии и геометрии, теории особенностей, математическая физики и др. В данной статье, формулируется Модельное предложение с доказательством, где представлено при сопоставлении принципа максимума энтропии с соответствующим ему принципа наименьшего действия с подобными этим принципам логическим «ходами» («конструкциями») конкретных объектов из разных разделов математики. Этим, в дальнейшем возможно будет обеспечить вышеуказанное «взаимопроникновение» этих объектов математики (друг в друга) с последующим возможным положительным эффектом в разных приложениях. На примере некоторых геодинамических составляющих нашей Земли (атмосфера, ионосфера), это в какой-то мере здесь будет продемонстрировано.

Здесь, в дальнейшем, это соответствие принципа максимума энтропии принципу наименьшего действия *условно* представим соответственно, как:

$$(p\boldsymbol{E} \sim p\boldsymbol{A}) \qquad (1)$$

Здесь символ **~**, есть символ соответствия.

Модельное предложение:

Действие соответствия принципа максимума энтропии принципу наименьшего действия (1), коррелируется при сопоставлении с подобными взаимоотношениями конкретных объектов в утверждениях (теоремах, леммах) из разных разделов математических знаний. Более обще - имеем некоторую модель подобия логических «ходов», «конструкций», где выражение (1) выступает в качестве «регулятора».

Доказательство

Продемонстрируем это «модельное поведение» с «регулятором» в следующих разделах математических знаний (с их относительно подробным рассмотрением для введения в курс дела) с их последующим обсуждением и поучительным примером от известного тополога Р. Мандельбаума.

а) Напомним, что модели произведений случайных матриц g(n) имеют весьма распространённое физическое применение. В статье [2], где рассматривается уход на бесконечность произведения g(n) случайных матриц (т. е. необязательно слабо симметрично распределённых), формулируется теорема, в которой при выполнении конкретных условий с <u>вероятностью единица</u> справедлива следующая оценка:

$$f(n) \leq C \exp(-bn), \; b > 0 \qquad (2)$$

с выполнением неравенства

$$tm(n) \geq jn, \; j > 0 \qquad (3)$$

Здесь f(n) - некоторая величина (функция) или характеристическая функция, используемая весьма сложным образом, чтобы обеспечить оценку (2), С — положительные числа с n и tm уходящим в бесконечность. А условие это, когда последовательность сомножителей g1, … ,gn обладает свойством распределения произведения hngn , где hn не зависит от gn и имеет распределение 1/gn с мажорированием известной меры Хаара в некоторой (не зависящей от n) окрестности единицы некоторой группы G с некоторым (не зависящим от n) числовым множителем. Всё это, в контексте уже произвольных распределений уходящих на бесконечность произведений g*(n) произвольных матриц. Вот эту g*(n), очевидно, возможно сопоставить с р**E**, т. е. с принципом максимума энтропии. Здесь группа G имеет унитарное представление и опосредованно весьма сложным образом связана с оценками (2) и (3). При этом заметим, что gn и hn также опосредованно связаны с этими оценками (более подробно в [1]). Очевидно, что оценки (2) и (3) (выступающие как ограничения) возможно сопоставить с р**A**, т. е. с принципом наименьшего действия. Также, из [2] имеем, что последовательность матриц g(n) правильно уходящих на бесконечность, если (всё с учётом выражения(1)):

$$p(g(n)) = p(k(n)) = \min (ti+1(n) - ti(n)) \sim \sim (p\mathbf{E} \sim p\mathbf{A}).$$

Здесь р – набор комплексных чисел,

t(n) = (t1(n), … , tm(n)) – обозначают вектор логарифмов диагональных элементов матрицы k(n); i = 1 , ... ,m -1.

Очевидно, что этот раздел математических знаний весьма убедительно коррелируется с выражением (1).

б) При рассмотрении приближения функции двух переменных суммой произведений функций одного переменного в пространствах Соболева W(G') в статье [3], в одной из задач, ищут число m и функции a и b принадлежащих W(I) с учётом, что

$$||a||_{W1} = ||b||_{W2} = 1 \qquad (4)$$

и функционал

$$J2(m; a, b) = ||u - m\ ab||W2 \qquad (4a)$$

принимает наименьшее значение. Здесь обозначают отрезок [0, 1] через I, квадрат 0 < x **,** y < 1 - через G', тензорное произведение функций a(x) и b(x) — через ab; u – аппроксимируемая функция. При этом, имеем теорему, где задача на минимум функционала (4) и (4а) эквивалентна задаче на максимум функционала:

$$(u, ab)^2_{W2(G)} / ||ab||_{W2(G)} \qquad (5).$$

Очевидно, что, выражения (4), (4а) и (5) сопоставимы соответственно с р**А** и р**Е** из (1).

в) В статье [4], касающейся перемежаемости старших моментов в модели ветвящегося процесса с диффузией в случайной среде, рассматривается вероятностное пространство (D, F, P) и заданы неотрицательные случайные величины q+(x, w) и q-(x, w). При фиксированном w развитие ансамбля частиц происходит по следующему закону: в начальный момент времени t = 0 в произвольной точке x в решётке Z(с размерностью d) находилась одна частица, которая независимо от прочих за время dt с вероятностью vdt (v – постоянная диффузия) может перейти в одно из соседних состояний x', |x – x' | = 1, дать «потомство» с вероятностью q+(x, w)dt, или погибнуть с вероятностью q-(x, w)dt.

При этом имеют уравнение с моментом m1:

$$dm1/dt = v \wedge m1 + q+(x, w)m1 \qquad (6),$$

и теоремой, где решение этого уравнения (6) или момент решения — m1(x, y, t, w) для любого v с вероятностью единица асимптотически растёт при t стремящемся в бесконечность (здесь y, также как и x — точка), т. е. очевидно имеем действие принципа максимума энтропии. Вообще, с учётом выражения (1):

$$P\{w : \lim \ln m1/ t(\ln t)^{**} = d^{**} \sim (p\mathbf{E} \sim p\mathbf{A})\} = 1 \qquad (6a).$$

Здесь ** - есть 1/h, где h >1, при этом d – некоторая размерность **Z** (множество целых чисел).

Самое главное, это то, что в доказательстве выражения (6а), в конечном итоге, определяющий вклад, вносит траектория, быстро попадающая в высокий максимум потенциала (траектория за время t уходящая на большие расстояния), т. е. поведение этой траектории отвечает принципу максимума энтропии. При этом принцип наименьшего действия (р**А**) как бы «интегрирован» в выражения (6) и (6а).

г) Представим следующий раздел математики — бесконечнократные пространства петель [5], восходящий к Дж. Адамсу. Под пространством петель понимают функциональное пространство непрерывных отображений w: I → X единичного интервала I = [0, 1] в пространство X, переводящих 0 в x0 и 1 в x0. При рассмотрении формальных свойств трансфера (позволяет определить в каждой из групп некоторой теории когомологий дополнительную структуру) рассмотрен пример, в котором используется сплетение групп. Если S2 Sn обозначает подгруппу в S2n, состоящую из перестановок р, сохраняющих множество пар (1, 2), (3,4), … , (2n-1, 2n), при этом р может переставлять пары и менять местами элементы любой пары. Эта подгруппа входит в точную последовательность

$$1 \rightarrow (S2\ S2) \rightarrow S2 \int Sn \rightarrow Sn \rightarrow 1 \quad (7).$$

При рассмотрении пространства вложений f: {1, 2, …, r} → **R**, элемент этого пространства рассматривают как набор из r различных точек в **R**, помеченными символами 1, 2, …, r.

Это пространство стягиваемо, и на нём свободно действует группа Sr с рассматрением пространства BSr (где r = 2(m+n). Далее строят накрывающее пространство, рассматривая пространство наборов из r точек в **R**, сгруппированных в m+n пар, которые ничем друг от друга не отличаются. Производя далее аналогично построение групп для замкнутой «квадратной» диаграммы (назовём её D, более подробно в [5]), получают следующие выражение для некоторых разновидностей групп:

$$H(B(S2\int Sm+n))\rightarrow H(B(S2(m+n))\rightarrow H(B(S2m\ S2n)) \quad (8).$$

При этом группа (в которой **S** обозначает сумму)

$$\mathbf{S}H(B((S2\ \int Sm\text{-}q)\ Sq\ (S2 \int Sn\text{-}q)) \quad (9),$$

связана с первой и третьей группой диаграммы (8), в общем откуда и получается эта замкнутая «квадратная» диаграмма D, при этом первая группа выражения (8) «генерирует» группу (9), а группа (9) «генерирует» третью группу выражения (8). В группе (9), суммирование производится по несколько усложнённой схеме и собственно она является как бы замыкающим «элементом» этой диаграммы D(по Дж. Адамсу, который также упоминает в данном контексте чисто алгебраическую проблему — поиск формул двойных смежных классов).

Схематично «квадратная» диаграммы D выглядит так:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{S}H(B(S_2 \int S_{m\text{-}q})Sq(S_2 \int S_{n\text{-}q})) \arrow[d] & H(B(S_2 \int S_{(m+n)})) \arrow[l] \arrow[d] \\ H(B(S_{2m}\, S_{2n})) & H(B(S_{2(m+n)})) \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad (D)$$

Здесь, группа стоящая в левом верхнем левом углу имеет отношение к пространству X, которое расщепляется в несвязное объединение компонент Xq, отвечающих различным q, таким, что

0 < q < min (m, n). Очевидно, что этот min (m, n) ~ p**A**. При этом вышеуказанное суммирование в группе (9) — соответствует принципу максимальной энтропии p**E**.

д) Рассмотрим торические действия в топологии и комбинаторики из [6] (наглядный пример «взаимопроникновения»), в части топологии конфигураций подпространств. Более конкретно — класс конфигураций подпространств, которые являются диагональными. Конфигурация здесь, есть конечное множество A афинных подпространств в афинном пространстве. Классическим примером диагональной конфигурации является набор всех диагональных гиперплоскостей в множестве комплексных чисел. Для каждого подмножества w = {i1,...,ik} определяется диагональное подпространство Dw во множестве вещественных чисел (аналогично определяются диагональные подпространства во множестве комплексных чисел. Для любого симплициального комплекса K на множестве вершин [m] вводится диагональная конфигурация DA(K), при этом через M(K) обозначают дополнение к DA(K). Далее имеем следующее предложение: при сопоставлении K → M(K), которое сохраняет операцию включения взаимно однозначное соответствие между множеством симплициальных комплексов на множестве вершин [m] и множеством дополнений диагональных конфигураций. Эту конструкцию очевидно возможно сопоставить с принципом максимальной энтропии p(**E**). При его доказательстве рассматривают модули $\mathrm{Tor}_{k[K]}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$, которые вычисляют, например, при помощи минимальной свободной резольвенты поля k, рассматриваемого как k[K] – модуль. Очевидно, что это отвечает принципу наименьшего действия p**(A)**. Здесь для групп когомологий дополнения M(K) вещественной конфигурации диагональных подпространств имеет место изоморфизм. Также имеет место изоморфизм некоторых алгебр.

е) Известная теорема Хирцебруха — Римана — Роха, при рассмотрении теорией пересечений, восходящих к У. Фултону [7], полезна при контролировании некоторых групп когомологий. Например, для достаточно больших n, имеем равенство:

$$\dim H(X, E(n)) = \int ch(E(n))\, td(T_x) \quad (10).$$

Здесь H – обильный дивизор, X - некоторое многообразие, E — векторное расслоение над X, в правой части имеем известные классы Чженя и Тодда, T_x — касательное расслоение. Очевидно, что в равенстве (10), принципы максимальной энтропии и наименьшего действия «интегрированы» в это равенство.

ж) Аналогично, при рассмотрении многомерной топологической теории Галуа [8] (конкретнее многомерных результатов о непредставимости), имеем утверждение, где для каждого i = 1,…, n,

операция дифференцирования, сопоставляющая ростку аналитической функции f в точке a, принадлежащей множеству комплексных чисел, росток функции df / dxi в той же точке, является операцией с контролируемыми особенностями (аналогично рассматривается и операция интегрирования). Всё это соответствует (р**E** ~ р**A**).

з) При рассмотрении потоков на однородных пространствах [9], в части минимальные потоки на нильпотентных многообразиях, имеем весьма нагладный пример для соответствия (1). Это, когда приводится пример бесконечного множества минимальных потоков вещественным параметром, которые являются дистальными (это когда для каждой пары x и y различных точек n- мерного тора M, оговорено расстояние некоторым условием), но не равномерно непрерывными.

и) В статье [13], связанной с построением периодических решений бикватернионного волнового уравнения электромагнитного поля (ЭГМ) поля, которое является бикватернионным обобщением уравнений Максвелла, имеем действие выражения (1). Предложенная бикватернионная теория, связанная с напряжённостью ЭГМ поля, позволяет строить бесконечное множество самых разнообразных решений для фотонов, света, фотонных облаков, т. е. имеем очевидно дело с р**E**. При этом, система уравнений Максвелла допускающая дальнейшее бикватернионное обобщение, как известно инвариантна (через тензорные формы) по отношению к известным преобразованиям Лоренца и Пуанкаре. А это говорит в пользу р**A** и в конечном итоге имеем действие соответствия (1).

Заметим, что читатели могут сами продолжить аналогичные рассмотрения из других разделов математических знаний, например — теория катастроф, методы построения устойчивых приближённых решений широкого класса некорректно поставленных математических задач и т. д. Более того, теория Гамильтона лежит в основе канонической теории возмущений с известной диффузией Арнольда [14] и деформации скобок Пуассона (задаёт дифференцирование некоторой алгебры функций) с расширением алгебр Ли [15]. При этом, алгебра Вирасоро (центральное расширение алгебры Ли векторных полей на окружности) находится весьма в глубокой связи с известным уравнением Кортевега-де Фриза, в основе которой лежит теория Гамильтона. Всё это в контексте выполнения соответствия (1). Из этого может возникнуть в дальнейшем (в аспекте «взаимопроникновения») интересное Приложение.

Обсудим всё вышесказанное.

Вначале заметим, как указывалось ранее, по части принципа наименьшего действия - активная сила равна инерциальной, т. е. запишем это, как

$$Pa = Pи \quad (11).$$

Это самое главное свойство, которое обеспечивает выполнение этого принципа механики. В представленных здесь разных разделах математических знаний, с учётом естественного максимального распространения в теоремах, леммах и т. п. определённого «влияния» на соответствующие объекты в их взаимосвязи — всё это соответствует принципу максимальной энтропии р**E**. При этом этот р**E** жёстко контролируется некими аналогами выражения (11). Под этими аналогами могут образно фигурировать такие понятия, назовём их «инструментариями», как изоморфизм (см., например, п. **е)**), операция перестановок (см., например, п. **г)**), некоторые функции (см., например, п. **а)**) и т. п. Понятно, что они действуют совместно с другими соответствующими объектами из этих разделов математических знаний. Заметим, что действие выражения (1), например, явно представлено в разделах математики - пункты, **а)**, **б), в)** и **з)**. А вот в пунктах **е), г), и)** и др. - несколько «скрытно», т. е. «не явно».

Как указывалось ранее, продемонстрируем поучительный пример от Р. Мандельбаума [10] при рассмотрении фальшивых четырёхмерных многообразий, которые возникают при построении компактного четырёхмерного многообразия Q, просто гомотопически эквивалентное проективному пространству R**P**, но не диффеоморфное ему. Если допустить, что Q(A) есть фальшивое R**P** (A — некая матрица), **S**A — его универсальное накрывающее, т. е. **S**A – гомотопическая сфера размерности 4. При этом, возникает вопрос, гомеоморфна ли она четырёхмерной сфере **S***?

Так вот Кирби и Акбулат (см. [10]), утверждали, будто бы для некоторых матриц A, для которых Q(A) – фальшивое R**P**, гомотопическая сфера **S**A

PL- гомеоморфна **S***(в смысле мы хотим многого, т. е. максимума энтропии р**E**). Однако их доказательство оказалось неверным. Суть этого доказательства состояла в явном построении картины ручек для **S**A и в применении известных преобразований Кирби для того, чтобы показать, что **S**A есть **S***. В конце доказательства прибавляется ручка к зацеплению, которая к сожалению, способ, каким она была добавлена — **не** соответствует универсальному накрывающему пространству (соответствующему р**E**) многообразия Q(A). Короче, здесь был не выдержан принцип наименьшего действия р**A**.

Здесь, в дальнейшем необходимо показать — при каких условиях будет наблюдаться гомеоморфность **S**A и **S***?

(тема для другой статьи).

Заметим, что соответствие (1), жёстко контролирует динамическую систему, например, в статье [11], касающуюся проблем турбулентности жидкости, рассматривается действие «регулятора» на основе закона сохранения энергии, т. е. аналога соответствию (1), или тоже «регулятора». Там «неподконтрольная» энергия «канализируется» с рассмотрением действия так называемой «траектории реализации».

В итоге, имеем определённую термодинамическую — механическую — математическую аналогию в аспекте действия соответствия (1). А всё это нужно для дальнейшего «взаимопроникновения» разных разделов математических знаний друг в друга для решения широкого круга проблем. Окончание доказательства.

3. Некоторое Приложение

а) Вначале заметим (см. п. 2**а**), что оценки (2) и (3) с их несимметричным распределением, вполне могут подойти для процессов нарушения пространственно-временных симметрий, что и требуется в статье [12](вероятность их появления равна единице — см. п.2**а)**. При этом имеем, с учётом выражений (4), (4а) и (5), как бы наличие «перетекания» энергетических «составляющих» в системе, но всё равно сумма энергии движения и внутренняя энергия системы сохраняется вдоль её траектории (имеем как максимум функционала, так и его минимум — см. п. 2**б)**. Это подтверждается выражениями (6) и (6а), поскольку траектория попадает в высокий максимум потенциала, что и говорит о её «живучести» (вероятность равна единице — см. п. **2в**). Очевидно, что этот анализ отвечает на вопрос — почему же так «живуча» уединённая волна в теории солитонов? Из этого могло бы возникнуть некоторое Приложение.

б) Вернёмся к статье [1], где обосновывается, что ключевыми и определяющими свойствами эволюции на всех иерархических ступенях атмосферы являются диссипативные процессы, обусловленные радиационным балансом. Пространственная неоднородность параметров атмосферы, зависимость величины, поступающей и уходящей из неё радиации от области атмосферы, приведут к тому, что в целом принцип наименьшего действия р**А** для неё уже будет расширенным, соответствующей открытой неравновесной динамической системе. В смысле, он будет определяться не только локальными параметрами атмосферы, но и внешними факторами, зависящими от пространства и времени. Напомним, что верхняя часть атмосферы, называемая ионосферой, облучаемая в основном солнечными лучами, играет здесь первостепенную роль. Математическая модель ионосферы представляет собой распределение значений, характеристик плазмы в виде функций: географического положения, высоты, дня года, солнечной геомагнитной активности. Слои ионосферы находятся в постоянном взаимодействии между собой. Модель ионосферы основана на физике исследуемых процессов, и она подвергается корректировке на основе различных экспериментальных данных (обычно это компьютерная программа).

Происходит взаимодействие геосфер (магнитосферы, ионосферы, атмосферы и литосферы). Существует так называемая геокосмическая связь (вызванная процессами, происходящими на Солнце, Земле, в космосе). Поэтому, здесь представляется интересным изучение, внедрение, написание алгоритмов с последующим написанием программ (например, в аспекте дальнейшей корректировки модели ионосферы и т. п.) именно на основе рассмотрения разных приемлемых (для подобных проблем) разделов математических знаний.

Например, на основе раздела п. **2д**), рассматривая дополнительно деформационную ретракцию UR(K) → cc(K) и накрывающее её Т- эквивариантная деформационная ретракция U(K) → LK. Здесь UR(K) – дополнение для вещественной координатной конфигурации GA(K); LK – комплекс конфигурации координатных подпространств; cc(К) — некоторый кубический комплекс. При этом, к сожалению, при рассмотрении конфигурации именно для диагональных подпространств, здесь нет аналога мультипликативного изоморфизма, который бы очень пригодился бы в контексте выражения (1). Этот раздел математических знаний сейчас активно развивается. При этом, важно отметить, что анализ в п. **3а)** по части уединённой волны может пригодиться для эффективной корректировки математической модели ионосферы. Ведь в состав ионосферы входит кроме смеси газов - и плазма (как уже указывалось выше). А, поскольку солитон есть структурно устойчивая уединённая волна, которая имеет место в качестве ионозвуковых и магнитозвуковых солитонов в плазме, то упомянутые в п. **3а)** разделы математических знаний могут быть весьма полезны.

в) Важно отметить, что касается известной задаче тысячелетия P/**NP** (коротко — это, когда время решения (количество «ходов») задачи равно **(P = NP)** времени проверки, или нет?) - как она соотносится с выражением (1)? Ведь, с ростом энтропии, т. е. однозначно усложнения условий задачи, всё равно должен выполняться принцип **наименьшего** действия, т. е. имеем, с учётом выражения (11):

P/NP ~ (р**E** ~ р**A**) ~ Ра = Ри (12).

Тем более, как указывалось выше (см. Введение): р**E** следует из р**A**. В этом случае имеем подтверждение, например, при рассмотрении дифференциальных градуированных алгебр (см. в [6]), в части взаимно однозначного соответствия между образующими рациональной гомотопической группы пространства X и образующими размерности i минимальной модели M_X (её ещё называют минимальной моделью алгебры A*(X). Понятно, что это всё относится к р**A**). Это было доказано (как аналоги) для более общих пространств, а также имеем обобщение и на более широкий класс нильпотентных пространств X, для которых фундаментальная группа нильпотентна и нильпотентно действует на старших гомотопических группах, т. е. имеем «рост» р**A** (очевидно в аспекте, как указывалось ранее — р**E** следует из р**A**).

Поэтому выражение (12), в этом контексте, показывает в пользу того, что **P** =

NP, т. е. все задачи являются относительно простыми (относительно не сложными).

Заключение

В итоге имеем, что вышеприведённый анализ (отчасти отвечающий системному подходу) призван привлечь внимание для дальнейших подобных исследований (более ёмких и фундаментальных), например, динамических систем. Здесь было показано, что решение многих физических и математических задач лежит в плоскости соответствия принципа максимальной энтропии принципу наименьшего действия, при этом важно «взаимопроникновение» различных разделов математических знаний для более эффективного решения многих проблем. Такие составляющие, или понятия **теоретической механики**, как энергия, теория устойчивости, принцип наименьшего действия, а также принцип наименьшего принуждения — являются определяющими, как аналоги, в физико-математической картине нашего Мироздания.

Список литературы:

1. Сомсиков В.М. Принцип максимума. энтропии и принцип наименьшего действия, // Проблемы эволюции открытых систем. – 2019. Т. 1 (янв.- июнь). – С. 60-72.

2. Тутубалин В.Н. Уход на бесконечность произведения случайных матриц // Вестник Московского университета, серия 1, Математика, механика. – 1990, №3. – С 6- 13.

3. Поспелов В.В. Приближение функции двух переменных суммой произведений функций одного переменного в пространствах Соболева, // Вестник Московского университета, серия 1, Математика, механика. – 1990, №4. – С. 6-10.

4. Яровая Е.Б. Перемежаемость старших моментов в модели ветвящегося процесса с диффузией в случайной среде // Вестник Московского университета, серия 1, Математика, механика. – 1990, №4. – С. 79-82.

5. Адамс Дж. Бесконечнократные пространства петель / Перевод с англ. под ред. Д.Б. Фукса. – М., Мир, 1982. – С 119-121.

6. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. – М.: Издат. МЦНМО, 2004. – С. 219-231, 244, 245.

7. Фултон У., Теория пересечений, М., Мир, 1989, перев. с англ. В.И. Данилова, С. 360.

8. Хованский А.Г. Топологическая теория Галуа. – М.: издат. МЦНМО, 2008. – С. 273.

9. Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. Потоки на однородных пространствах / Перев. В.Н. Тутубалина; под ред. Я. Г. Синая. – М.: Мир, 1966. – С. 72, 73.

10. Мандельбаум Р. Четырёхмерная топология / перев. О.Я. Виро. – М., Мир, 1981. – С. 103-108.

11. Проняев В.В. В поисках эффективных подходов в решении проблем турбулентности жидкости с позиции разных разделов математики // Проблемы эволюции открытых систем. – 2019, Т. 2 (июл.-дек.). – С. 81-90.

12. Сомсиков В.М., Детерминированная необратимость в природе хаоса и порядка, // Проблемы эволюции открытых систем. – 2019, Т. 1 (янв.-июн.). – С. 47, 48.

13. Алексеева Л.А. Бикватернионы фотонов. Свет // Проблемы эволюции открытых систем. – 2020, Том 1 (янв.-июнь), вып. 22. – С. 75-82.

14. Лошак П. Каноническая теория возмущений, основанный на совместных приближениях // Успехи матем. наук. – 1992, Т. 47, вып. 6(288). – С. 59-119

15. Овсиенко В.Ю., Роже К. Деформация скобок Пуассона и расширения алгебр Ли контактных векторных полей // Успехи матем. наук. – 1992, Т. 47, вып. 6(288). – С. 141-145, 189-191.

Принято в печать 15.09.2022