

Ж.А. Кудышев¹, А.Е. Давлетов², Л.Т. Еримбетова²,
Е.С. Мухаметкаримов², Ф. Курбанов²

¹Школа электротехники и вычислительной техники, Центр нанотехнологий им. Бирка, Университет Пердью, Уэст-Лафайет, Индиана, 47907, США

²Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: askar@physics.kz

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ

Аннотация. Целью исследования является построение самосогласованной химической модели пылевой плазмы, состоящей из электронов, протонов, нейтральных атомов и пылевых частиц. Предложено выражение для свободной энергии, которое учитывает заряд пылевых частиц и состоит из идеального и неидеального вкладов. Неидеальная часть свободной энергии рассчитывается в рамках самосогласованной химической модели, которая основывается на обобщенном уравнении Больцмана-Пуассона, полученного из цепочки уравнений Боголюбова для равновесных функций распределения в приближении парных корреляций. В качестве микрopotенциалов взаимодействия электронов и протонов используется кулоновский потенциал, а их взаимодействия с атомами, а также атомов между собой, описываются известными потенциалами Мотта. Существенно, что пылинки имеют конечный размер, что необходимо учитывать в потенциале их взаимодействия между собой, а также с протонами и электронами окружающей плазмы. Продемонстрировано, что свободная энергия рассматриваемой многокомпонентной среды представляет собой функцию только концентрации свободных электронов и протонов, а ее последующая минимизация позволяет определить соответствующие равновесные значения. Это позволяет детально изучить ионизационное равновесие в плазменной среде и одновременно определить заряд пылевых частиц. В рамках приближения парных корреляций становятся известными корреляционные функции системы, к которым относятся радиальные функции распределения и статические структурные факторы, поведение которых может быть изучено в широком диапазоне изменения параметров среды. Знание корреляционных функций системы позволяет в свою очередь рассчитать термодинамические характеристики многокомпонентной пылевой плазмы, что выполнено, в частности, для корреляционной энергии. Полученные данные по калорическому уравнению состояния позволяют предсказать новые эффекты при распространении пылевых акустических волн, связанные с перезарядкой пылинок в плазме с изменяющимся ионизационным равновесием.

Ключевые слова: пылевая плазма, химическая модель, радиальные функции распределения, статические структурные факторы, корреляционная энергия.

Введение

На сегодняшний день пылевая плазма по-прежнему создает множество проблем как в экспериментальных, так и в теоретических исследованиях [1], что строго соответствует ее довольно сложной природе. Действительно, типичная пылевая плазма состоит из электронов, ионов, нейтральных атомов и пылевых частиц. Все разнообразие явлений, протекающих в такой плазме, связано с межчастичными взаимодействиями, которые имеют резко отличающиеся друг от друга характерные пространственно-временные масштабы эволюции [2]. Следует

отметить, что важную роль в описании пылевой плазмы занимают источники ионизации, которыми могут быть либо внешние электрические поля и излучения в различных газовых разрядах, либо тепловое движение, например, в магнитных термоядерных установках [3].

С другой стороны, трудность описания пылевой плазмы заключается в том, что она встречается в довольно широком диапазоне физических условий, охватывающих порядка по величине температуры и плотности частиц [4]. При этом большое количество эффектов в пылевой плазме конкурируют

друг с другом, препятствуя дальнейшему построению единого теоретического подхода, необходимого для понимания тонкостей явлений, происходящих как в технологических установках [5], так и в природе [6,7]. Тем не менее, пылевая плазма особенно выделяется среди всех других объектов, представляющих научный интерес, тем, что существует возможность записи временного поведения макроскопических пылевых частиц с помощью скоростной видеосъемки высокого разрешения [8,9]. Это, в свою очередь, позволяет проверять различные теоретические модели, разработанные для систем многих тел [10].

Очевидно, что пылевые частицы, находясь в частично ионизованной среде, могут принципиально изменить локальные характеристики плазмы. Прежде всего это утверждение верно для ионизационного равновесия плазмы. Поскольку пылевые частицы в плазме способны достигать довольно высокого, в основном отрицательного, электрического заряда [11,12], то это приводит к их влиянию на локальную квазинейтральность среды. Следовательно, увеличение плотности пылевых частиц может легко вызвать значительное уменьшение плотности числа электронов в плазме [13,14]. Другим ожидаемым следствием инжекции пылинок в плазму является рост температуры электронов, который в соответствии с уменьшением плотности электронов, по-видимому, является неизбежным откликом плазмы с целью поддержания скорости ударной ионизации [15,16]. Кроме того, некоторые специфические электрические свойства газового разряда, такие как импеданс и фазовый сдвиг между током и напряжением, оказались очень чувствительными к присутствию даже небольшого количества пылевых частиц [17].

Следует отметить, что ситуация с ионизационным равновесием остается неоднозначной для всех областей плазмы, что особенно справедливо для так называемых войдов (пустот) пылевого облака. В частности, оптическая эмиссионная спектроскопия дала четкое свидетельство того, что температура электронов повышается [18] при инжекции пылинок, в то время как прямые измерения с помощью электрических зондов

указывают на обратное [19]. Любопытно, что численное моделирование напрямую продемонстрировало [20], что и повышение температуры электронов, и рост их концентрация должны наблюдаться в войдах пылевого облака. Недавно с помощью микроволновой интерферометрии [21] была установлена зависимость концентрации электронов от размера пылинок, так что повышенная концентрация электронов была обнаружена для довольно крупных пылинок.

Параметры пылевой плазмы

Для определенности в последующих аналитических приближениях и численных расчетах предполагается, что пылевая плазма содержит четыре вида частиц: (i) свободные электроны с плотностью числа n_e , массой m_e и электрическим зарядом $-e$; (ii) свободные протоны с плотностью числа n_p , массой m_p и электрическим зарядом e ; (iii) нейтральные частицы, то есть электроны и протоны, связанные в атомах водорода, с плотностью числа n_n и массой m_n ; (iv) пылевые частицы с концентрацией n_d , массой m_d и положительным электрическим зарядом Ze . Однако точный состав плазмы, который включает в себя концентрацию свободных электронов, свободных протонов и нейтральных частиц, а также электрический заряд пылевых частиц, остается первоначально неизвестным и должен быть определен при последующем рассмотрении.

Чтобы теоретически описать состояние пылевой плазмы, концентрация протонов в системе, $n = n_p + n_n$ поддерживается постоянной, так что безразмерный параметр плотности обычно определяется как

$$r_s = \frac{a}{a_B}, \quad (1)$$

где $a_p = \sqrt[3]{3/4\pi n_p}$ – радиус Вигнера-Зейца, $a_B = \hbar^2 / m_e e^2$ – первый борковский радиус, а \hbar – постоянная Планка. Параметр плотности (1) может варьироваться в довольно широком диапазоне, но всегда должен быть больше единицы,

Другой параметр, необходимый для описания состояния пылевой плазмы, назы-

вается параметром связи и определяет степень неидеальности системы, представляя отношение средней энергии кулоновского взаимодействия к тепловой кинетической энергии в виде

$$\Gamma = \frac{e^2}{ak_b T}, \quad (2)$$

где k_b – постоянная Больцмана, T – температура среды. Для рассматриваемого случая температура должна быть достаточно высокой, так чтобы выполнялось неравенство $\Gamma < 1$.

Что касается пылевой составляющей, то ее числовая плотность количественно определяется параметром плотности пылинок

$$\gamma = n_d / n, \quad (3)$$

который обычно имеет очень маленькую величину $\gamma \ll 1$.

Для упрощения предполагается, что каждая пылинка представляет собой твердый шар радиуса R , причем материал пылинки характеризуется некоторой работой выхода W для электронов. Для всего следующего важно, чтобы частицы пыли имели конечные размеры, определяемые плотностью их упаковки как

$$\eta = 4\pi n_d R^3 / 3, \quad (4)$$

которая, как известно, не превышает свою верхнюю теоретическую границу $\pi / \sqrt{18}$.

Конечно, обязательно, чтобы пылевая плазма сохраняла свою локальную квазинейтральность, накладывая следующее условие

$$n_e = n_p + Zn_d. \quad (5)$$

Обратите внимание, что приведенные выше параметры подразумевают, что пылевая плазма находится в своем равновесном состоянии, так что температуры всех компонентов плазмы по существу одинаковы. Такие объекты не редки по своей природе, например, звездные атмосферы, и предполагается, что термоэлектронная эмиссия играет существенную роль в определении их довольно интересных физических характеристик [22].

Химическая модель

В рамках химической модели свободная энергия Гельмгольца любой системы F_{tot} в конечном итоге определяется как сумма идеальной F_{id} и неидеальной F_{exc} частей

$$F_{tot} = F_{id} + F_{exc}. \quad (6)$$

Идеальная часть свободной энергии Гельмгольца является аддитивной из-за правила линейного смешивания, в то время как неидеальная часть, будет определена в рамках самосогласованной химической модели частично ионизованной плазмы.

Предположим, что каждая пылевая частица способна испускать электроны, но не может поглощать протоны. Несмотря на то, что электроны и протоны постоянно нейтрализуются на поверхностях пылинок, этот процесс учитывается наличием нейтралов в соответствии с эргодической гипотезой. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать эмиссию электронов пылевыми частицами как некоторый эффективный процесс ионизации, то есть незаряженная пылевая частица рассматривается как нейтральная частица, тогда как заряженная пылевая частица рассматривается как ее ионизированный аналог, что фактически является прямой аналогией с атомом. Отличие состоит в том, что все пылевые частицы являются заряженными, то есть нейтральные пылинки отсутствуют. Напротив, с чисто теоретической точки зрения нейтральные атомы всегда присутствуют в частично ионизованной плазме, что гарантирует баланс между процессами ионизации и рекомбинации.

Для дальнейшего описания определим минимальную работу, которая должна быть совершена, чтобы вытянуть Z электронов из одной нейтральной пылевой частицы и перенести их все на бесконечное удаление один за другим, тем самым оставляя пылинку с положительным зарядом Ze . Эта работа легко выводится в рамках классической электродинамики и равна

$$A = ZW - \frac{Z(Z+1)e^2}{2R}. \quad (7)$$

Теперь нетрудно получить выражение для свободной энергии Гельмгольца заряженных пылевых частиц. Из квантово-

статистической физики идеальных систем многих тел хорошо известно, что идеальная часть свободной энергии Гельмгольца нейтральных пылевых частиц N_d определяется как

$$F = F_0 + N_d k_B T [\ln(n_d \lambda_d^3 - 1)] \quad (8)$$

с тепловой длиной волны де Бройля λ_d пылевой частицы, определенной ниже.

Затем при фиксированной температуре выполняется работа (7) по зарядке каждой из пылевых частиц N_d , которая в соответствии с общими законами термодинамики немедленно изменяет их свободную энергию Гельмгольца в следующем виде

$$F = F_0 + N_d A. \quad (9)$$

После некоторого тривиального преобразования выражение для идеальной части, F_{id} , свободной энергии Гельмгольца всей системы может быть приведено в виде

$$\begin{aligned} \frac{F_{id}}{V k_B T} = & n_e \left[\ln n_e \lambda_e^3 / 2 - 1 \right] + \\ & + n_p \left[\ln n_p \lambda_p^3 - 1 \right] + n_n \left[\ln n_n \lambda_n^3 / \sigma - 1 \right] + \\ & + n_d \left[\ln n_d \lambda_d^3 \Sigma - 1 \right], \quad (10) \end{aligned}$$

где V – объем системы, $\lambda_a = (2\pi \hbar^2 / m_a k_B T)^{1/2}$ – длина волны де Бройля частицы сорта a , а внутренняя статистическая сумма атома водорода σ выбирается в форме, предложенной Планком и Ларкиным [23]:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} 2n^2 \left[\exp\left(\frac{I_n}{k_B T}\right) - 1 - \frac{I_n}{k_B T} \right], \quad (11)$$

где $I_n = I / n^2$ – энергетический спектр атома водорода, а $I = -m_e m_p e^4 / 2 m_e + m_p \hbar^2$ – энергия основного состояния атома водорода, а внутренняя статистическая сумма пылевой частицы имеет вид

$$\Sigma = \exp\left(\frac{A}{k_B T}\right). \quad (12)$$

Весьма примечательно то, что выражение (10) позволяет оценить термодинамические свойства не только пылевой компоненты, но и всей системы в целом. Кроме того, функции (11) и (12) появляются в третьем и четвертом членах в правой части

соотношения (10) по-разному, поскольку третий член строго соответствует нейтральным атомам, а четвертый относится к заряженным пылевым частицам. Следует обязательно подчеркнуть, что в предельном случае отсутствия протонов и атомов, а также вклада нейтральных пылевых частиц выражение (10) быстро превращается в свободную энергию Гельмгольца для электронов в электронно-пылевой плазме [24], что позволяет установить точное соответствие с результатами подхода OML.

Во многих экспериментальных и естественных условиях межчастичные взаимодействия играют заметную роль в пылевой плазме, что особенно верно для пылинок, способных приобретать значительный электрический заряд. Одним из самых простых вариантов учета межчастичных взаимодействий является самосогласованная химическая модель, впервые предложенная в [25]. Она полностью основана на процедуре перенормировки взаимодействий частиц [26], которая приводит к следующему обобщенному уравнению Больцмана-Пуассона для макроскопического потенциала взаимодействия частиц сортов a и b с учетом коллективных явлений в среде

$$\begin{aligned} \Delta_i \Phi_{ab}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_j^b) = & \Delta_i \varphi_{ab}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_j^b) - \\ & - \frac{n_c}{k_B T} \int \Delta_i \varphi_{ac}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_k^c) \Phi_{cb}(\mathbf{r}_j^b, \mathbf{r}_k^c) d\mathbf{r}_k^c. \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь $\varphi_{ab}(\mathbf{r}_i^a, \mathbf{r}_j^b)$ обозначает истинный потенциал микроскопического взаимодействия, \mathbf{r}_i^a обозначает радиус-вектор i -ой частицы, Δ_i является соответствующим оператором Лапласа, а n_c обозначает числовую плотность частиц сорта c . Обратите внимание, что везде суммирование подразумевается по повторяющимся индексам сортов частиц.

В Фурье пространстве система уравнений (13) для всех видов частиц преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решение которой для Фурье-образа макропотенциала $\tilde{\Phi}_{ab}(k)$ выражается через Фурье-образ микроскопического потенциала $\tilde{\varphi}_{ab}(k)$ следующим образом [27]

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{ab}(k) = & \frac{1}{\Delta} \left(\tilde{\varphi}_{ab}(k) + \sum_{c=e,p,n,d} A_c \times \right. \\ & \times \tilde{\varphi}_{cc}(k) \tilde{\varphi}_{ab}(k) - \tilde{\varphi}_{ac}(k) \tilde{\varphi}_{bc}(k) + \\ & + \delta_{ab} \sum_{c,d=e,p,n,d} A_c A_d \tilde{\varphi}_{ac}(k) \tilde{\varphi}_{ad}(k) \tilde{\varphi}_{cd}(k) + \\ & + \frac{\tilde{\varphi}_{aa}(k) \tilde{\varphi}_{cc}(k) \tilde{\varphi}_{dd}(k)}{2} - \left(\frac{\tilde{\varphi}_{aa}(k) \tilde{\varphi}_{cd}(k)^2}{2} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\tilde{\varphi}_{cc}(k) \tilde{\varphi}_{ad}(k)^2 + \tilde{\varphi}_{dd}(k) \tilde{\varphi}_{ac}(k)^2}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 + \sum_{a=e,p,n,d} A_a \tilde{\varphi}_{aa}(k) + \sum_{a,b} A_a A_b \tilde{\varphi}_{aa}(k) \tilde{\varphi}_{bb}(k) \\ & - \tilde{\varphi}_{ab}(k)^2 + A_a A_b A_c \times \left[\frac{\tilde{\varphi}_{ab}(k) \tilde{\varphi}_{bc}(k) \tilde{\varphi}_{ac}(k)}{3} + \right. \\ & + \frac{\tilde{\varphi}_{aa}(k) \tilde{\varphi}_{bb}(k) \tilde{\varphi}_{cc}(k)}{6} - \left(\frac{\tilde{\varphi}_{aa}(k) \tilde{\varphi}_{bc}(k)^2}{6} + \right. \\ & \left. \left. \frac{\tilde{\varphi}_{bb}(k) \tilde{\varphi}_{ac}(k)^2 + \tilde{\varphi}_{cc}(k) \tilde{\varphi}_{ab}(k)^2}{6} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $A_c = n_c / k_B T$, а δ_{ab} – символ Кронекера.

Для применения химической модели, должны быть соответствующим образом выбраны микроскопические потенциалы. Взаимодействия между электронами и протонами плазменной среды считаются чисто кулоновскими, так что Фурье-образы соответствующих микропотенциалов записываются как

$$\tilde{\varphi}_{ee}(k) = \tilde{\varphi}_{pp}(k) = -\tilde{\varphi}_{ep}(k) = \frac{4\pi e^2}{k^2}. \quad (16)$$

Микроскопические потенциалы с участием электронов, протонов и нейтралов выбираются для водородной плазмы в простейшей доступной форме с Фурье-образами [28]

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{pn}(k) = -\tilde{\varphi}_{en}(k) = & \frac{4\pi e^2 k^2 + 8/a_B^2}{k^2 + 4/a_B^2}, \\ \tilde{\varphi}_{nn}(k) = & \frac{4\pi e^2}{k^2 + 2/a_B^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Что касается микроскопических потенциалов для взаимодействия частиц пыли и частиц пыли с электронами и протонами, используются следующие Фурье-образы [29]

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{ed}(k) = -\tilde{\varphi}_{pd}(k) = & \frac{4\pi Z e^2}{k^2} - \frac{4\pi Z e^2 R}{k} \times \\ & \times \left[\text{Ci}(kR) \sin(kR) + \frac{1}{2} \cos(kR) (\pi - 2\text{Si}(kR)) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{dd}(k) = & \frac{4\pi Z^2 e^2}{k^2} - \frac{8\pi Z^2 e^2 R}{k} \times \\ & \times \text{Ci}(2kR) \sin(2kR) + \\ & + \frac{1}{2} \cos(2kR) (\pi - 2\text{Si}(2kR)) \end{aligned} \quad (19)$$

где $\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ и $\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ – интегральный косинус и синус соответственно.

Разумно признать, что из-за нейтральности взаимодействие между атомами водорода и пылевыми частицами действительно пренебрежимо малы по сравнению с другими видами взаимодействий, описанными выше, и в последующем анализе не рассматриваются.

Неидеальная часть F_{exc} свободной энергии Гельмгольца окончательно выводится в рамках самосогласованной химической модели как [25,30]

$$\begin{aligned} F_{exc} = & \frac{V}{2} \sum_{a,b} n_a n_b \tilde{\varphi}_{ab}(0) + \\ & + \frac{VT}{16\pi^3 k_B} \sum_{a,b} n_a n_b \int d\mathbf{k} \tilde{\varphi}_{ab}(k) \int dT \frac{\tilde{\Phi}_{ab}(k)}{T^3}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что выражение (20) для неидеальной части свободной энергии справедливо в приближении парных корреляций цепочки уравнений Боголюбова для равновесных функций распределения и правильно учитывает взаимные взаимодействия между всеми компонентами плазмы.

При фиксированных значениях безразмерных параметров (1) – (4), а также работы выхода W полная свободная энергия F_{to} пылевой плазмы зависит от концентрации свободных электронов n_e , концентрации свободных протонов n_p и зарядного числа Z пылевых частиц, которые локально связаны через условие квазинейтральности (5). Вводя приведенные величины $\alpha_e = n_e/n$ и $\alpha_p = n_p/n$ и исключая Z с помощью соотношения квазинейтральности (5), свободная энергия Гельмгольца в ко-

в конечном итоге оказывается функцией двух переменных α_e и α_p , и ее дальнейшая минимизация обеспечивает получение их равновесных значений. Отметим, что в общем случае $\alpha_e \neq \alpha_p$ и, следовательно, существуют две степени ионизации, α_e для свободных электронов и α_p для свободных протонов. Следует сказать, что свободная энергия является трансцендентной функцией степеней ионизации, а также включает в себя сложные интегралы, что делает ее численную минимизацию довольно сложным процессом вычислений.

На рисунках 1 и 2 представлены характерные зависимости для логарифмов электронной и протонной степеней ионизации в зависимости от параметра связи Γ .

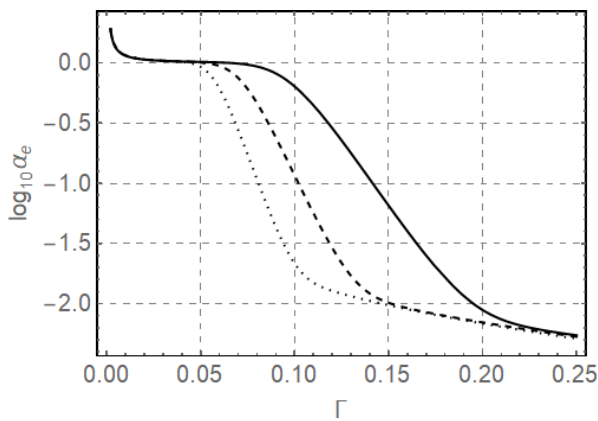


Рисунок 1 – Логарифм степени ионизации электронов α_e пылевой плазмы как функция параметра связи Γ при фиксированных значениях $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 10^{-4}$, и $W = 1$ эВ. Сплошная линия: $r_s = 20$; штриховая линия: $r_s = 30$; точечная линия: $r_s = 40$

При условии, что числовая плотность пылинок остается постоянной, степени ионизации электронов и протонов оказываются независимыми от плотности окружающей плазменной среды при малых значениях параметра связи Γ , что является характерной особенностью так называемой электронно-пылевой плазмы, в которой присутствием свободных положительных ионов можно полностью пренебречь, так как их число мало по сравнению с числом свободных электронов.

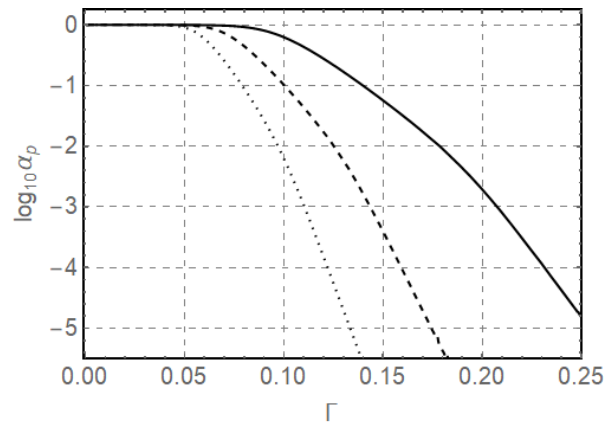


Рисунок 2 – Логарифм степени ионизации электронов α_p пылевой плазмы как функция параметра связи Γ при фиксированных значениях $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 10^{-4}$, и $W = 1$ эВ. Сплошная линия: $r_s = 20$; штриховая линия: $r_s = 30$; точечная линия: $r_s = 40$

Однако это не так для довольно больших значений параметра связи, когда увеличение параметра плотности r_s приводит к снижению степени ионизации как для электронов, так и для протонов. Следует также отметить, что дальнейший рост параметра связи Γ должен выявить противоположное поведение, когда степень ионизации электронов уменьшается с ростом параметра плотности r_s , что вызвано увеличением вклада неидеальной части свободной энергии. Видно, что при одних и тех же значениях безразмерных параметров электронная и протонная степени ионизации различаются на порядки, что свидетельствует о нарушении формулы Саха.

Корреляционные функции

На основе псевдопотенциальной модели взаимодействия частиц появляется возможность изучить структурные свойства пылевой плазмы. Известно, что радиальные функции распределения характеризуют плотность вероятности нахождения пробной частицы от другой на определенном расстоянии и в приближении парных корреляций они имеют следующий вид:

$$g_{ab}(r) = 1 + h_{ab}(r) = 1 - \frac{\Phi_{ab}(r)}{k_B T}, \quad (23)$$

где $\Phi_{ab}(r)$ – макропотенциал взаимодействия частиц сортов a и b .

С помощью данного выражения можно исследовать радиальные функции распределения при различных параметрах плазмы, что в свою очередь может дать полную информацию о ее структурных свойствах. Ниже на рисунках 3 и 4 приведены зависимости радиальных функций распределения от расстояния при различных параметрах пылевой плазмы. Поскольку большой интерес в исследовании пылевой плазмы представляет плазменно-пылевой кристалл, то поведение радиальных функций распределения позволяет сделать вывод о пространственном расположении макрочастиц – хаотическом или упорядоченном, характерном для жидкостных или кристаллических структур соответственно.

На рисунках 3 и 4 представлены радиальные функции распределения для пар частиц атом-атом и пылинка-пылинка при различных параметрах плазмы. Заметно выраженное немонотонное поведение, свидетельствующее о ближнем порядке в расположении соответствующих пар частиц.

Интересно, что с ростом параметра связи осцилляции на радиальной функции распределения атомов друг относительно друга возрастают, что можно объяснить ростом их концентрации, а значит и их взаимным влиянием. Для радиальной функции распределения пылевых частиц друг относительно друга наблюдается противоположное поведение, при этом значения самой радиальной функции распределения сильно убывают по модулю с ростом параметра связи, что также можно приписать снижению доли заряженных частиц плазмы в среде.

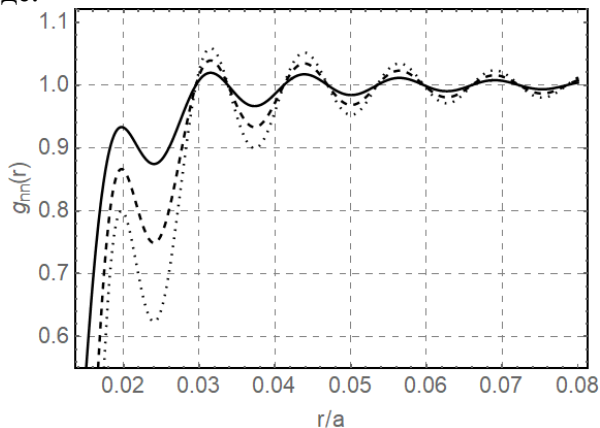


Рисунок 3 – Атом-атомная радиальная функция распределения $g_{aa}(r)$ пылевой плазмы как функция безразмерного рас-

стояния r/a при фиксированных $\gamma r_s = 20$, $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$, и $W = 1 \text{ эВ}$.
Сплошная линия: $\Gamma = 0.1$; штриховая линия: $\Gamma = 0.2$; точечная линия: $\Gamma = 0.3$

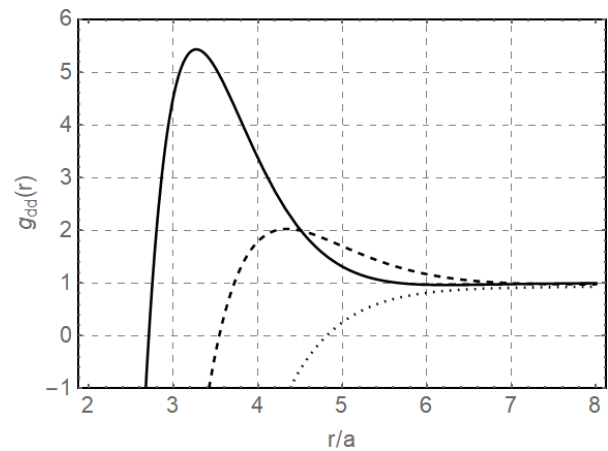


Рисунок 3 – Межпылевая радиальная функция распределения $g_{dd}(r)$ пылевой плазмы как функция безразмерного расстояния r/a при фиксированных значениях $r_s = 20$, $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$, и $W = 1 \text{ эВ}$.
Сплошная линия: $\Gamma = 0.01$; штриховая линия: $\Gamma = 0.02$; точечная линия: $\Gamma = 0.04$

Отметим, что пик на радиальной функции распределения пылевых частиц соответствует среднему расстоянию между ними, тоже самое относится к радиальной функции распределения атом-атом, хотя характерные расстояния при этом оказываются существенно разными.

Еще одной важной величиной, определяющей микроскопические свойства системы, является структурный фактор $S_{ab}(k)$, который определяется через радиальные функции распределения следующим образом

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} + \int g_{ab}(r) - 1 \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (24)$$

где δ_{ab} – символ Кронекера.

Подставив (6.1) в (6.2) получим

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} - \frac{\sqrt{n_a n_b}}{k_B T} \tilde{\Phi}_{ab}(k). \quad (25)$$

Здесь n_a – концентрация частиц сорта a , $\tilde{\Phi}_{ab}(k)$ – Фурье-образ макропотенциала взаимодействия. Следует отметить, что, в отличие от самого потенциала взаимодействия, его Фурье-образ, а значит и структур-

ный фактор, может быть записан в простом аналитическом виде (14).

Ниже представлены рисунки 5 и 6, которые показывают зависимости структурных факторов от волнового числа при различных фиксированных параметрах пылевой плазмы для пары частиц электрон-электрон, а также электрон-пылинка.

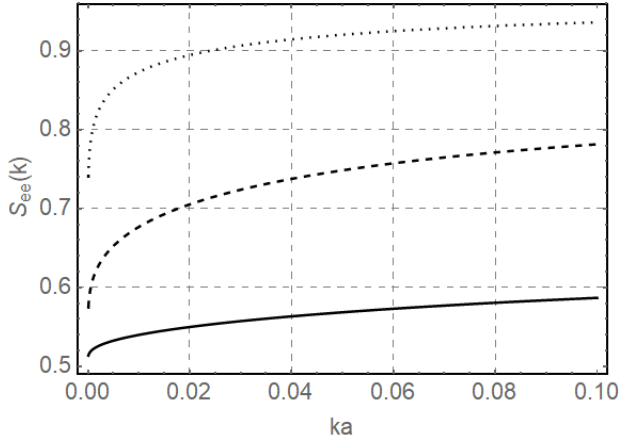


Рисунок 5 – Электрон-электронный структурный фактор $S_{ee}(k)$ пылевой плазмы как функция безразмерного волнового числа ka при фиксированных значениях $r_s = 20$, $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$, и $W = 1 \text{ эВ}$. Сплошная линия: $\Gamma = 0.1$; штриховая линия: $\Gamma = 0.15$; точечная линия: $\Gamma = 0.2$

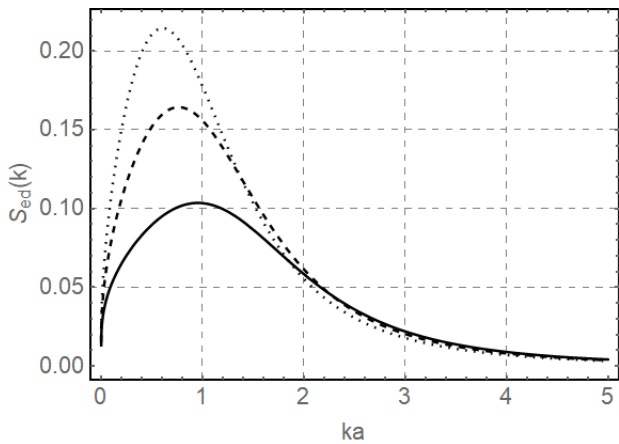


Рисунок 6 – Электрон-пылевой структурный фактор $S_{ed}(k)$ пылевой плазмы как функция безразмерного волнового числа ka при фиксированных значениях $r_s = 20$, $\gamma = 10^{-4}$, $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$, и $W = 1 \text{ эВ}$. Сплошная линия: $\Gamma = 0.01$; штриховая линия: $\Gamma = 0.02$; точечная линия: $\Gamma = 0.04$

Видно, что электрон-электронный структурный фактор является монотонной

функцией волнового числа, причем он падает по величине с ростом параметра связи, что легко объясняется уменьшением концентрации электронов в среде. Что касается структурного фактора электрон-пылинка, то он является немонотонным в зависимости от волнового числа, а при увеличении параметра связи высота максимума на нем возрастает.

Термодинамика пылевой плазмы

Одной из наиболее важных термодинамических характеристик, определяющих свойства плазмы, является внутренняя энергия. Из статистической теории равновесного состояния систем, состоящих из большого числа частиц, хорошо известно, что внутренняя энергия полной системы E может быть вычислена с помощью соотношения

$$E = \frac{3}{2} N k_B T + U_N, \quad (26)$$

где N – полное число частиц в системе, $\frac{3}{2} N k_B T$ – внутренняя энергия идеального газа, а корреляционная энергия U_N определяется через радиальные функции распределения $g_{ab}(r)$ посредством соотношения

$$U_N = 2\pi V \int_0^\infty \sum_{a,b} n_a n_b \varphi_{ab}(r) g_{ab}(r) r^2 dr, \quad (27)$$

где V – объем системы, $\varphi_{ab}(r)$ – микропотенциал взаимодействия. Решения данного выражения с учетом использованием (6.1.1) и перехода в Фурье пространство, имеет вид

$$U_N = \frac{V}{2} \int \sum_{a,b} n_a n_b \delta(k) \tilde{\varphi}_{ab}(k) d\mathbf{k} - \frac{V}{4\pi^3 k_B T} \iint \sum_{a,b} n_a n_b \delta(k+k') \times \tilde{\varphi}_{ab}(k) \tilde{\varphi}_{ab}(k') d\mathbf{k} d\mathbf{k}'. \quad (28)$$

Воспользовавшись свойством δ – функции $\int \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$, окончательно имеем

$$U_N = \frac{V}{2} \sum_{a,b} n_a n_b \tilde{\varphi}_{ab}(0) - \frac{V}{4\pi^3 k_B T} \int \sum_{a,b} n_a n_b \tilde{\varphi}_{ab}(k) \tilde{\varphi}_{ab}(k) d\mathbf{k}. \quad (29)$$

На рисунках 7 и 8 продемонстрированы зависимости безразмерной корреляционной энергии плазмы $U_n/Nk_B T$ от параметра связи.

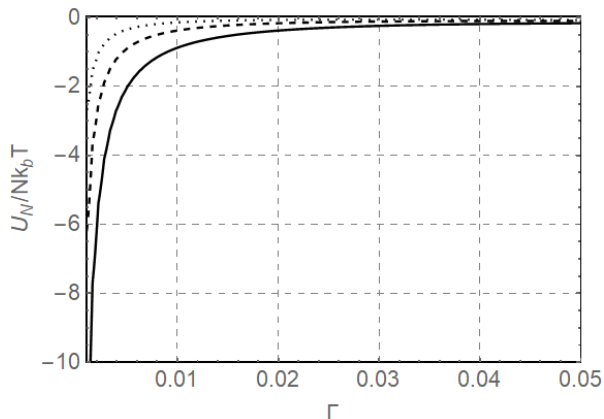


Рисунок 7 – Безразмерная корреляционная энергия $U_n/Nk_B T$ пылевой плазмы как функция параметра связи Γ при фиксированных значениях $r_s = 20$, $\gamma = 10^{-4}$, и $W = 1$ эВ. Сплошная линия: $\eta = 10^{-3}$; штриховая линия: $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$; точечная линия: $\eta = 1.5625 \cdot 10^{-5}$

Видно, что с ростом параметра связи корреляционная энергия убывает, что естественно объясняется снижением заряда пылевых частиц и одновременным уменьшением концентрации заряженной компоненты плазмы. Также из рисунка 7 можно сделать вывод о том, что с увеличением размера пылинок растет и корреляционная энергия, так как увеличивается заряд пылинок и концентрация электронов в плазме. Тот же самый эффект наблюдается и с ростом концентрации пылинок, показанного на рисунке 8, при этом сильно возрастает именно концентрация свободных электронов в плазме. Отметим, что уменьшение корреляционной энергии пылевой плазмы с ростом параметра связи является довольно необычным явлением и объясняется в данном случае не только существенным изменением состава среды, в частности снижением концентраций свободных электронов и протонов, но и перезарядкой пылевых частиц, концентрация которых остается фиксированной.

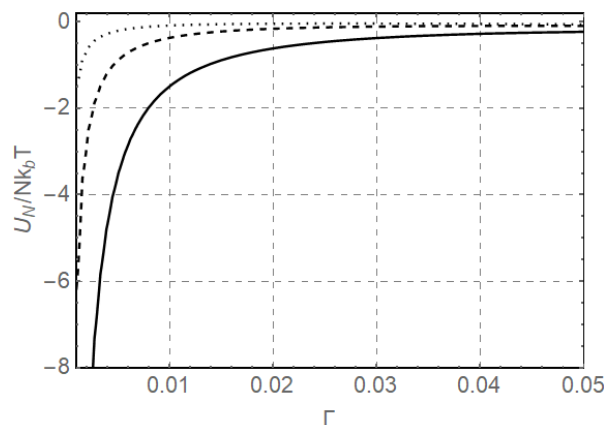


Рисунок 8 – Безразмерная корреляционная энергия $U_n/Nk_B T$ пылевой плазмы как функция параметра связи Γ при фиксированных значениях $r_s = 20$, $\eta = 1.25 \cdot 10^{-4}$, и $W = 1$ эВ. Сплошная линия: $\gamma = 10^{-3}$; штриховая линия: $\gamma = 10^{-4}$; точечная линия: $\gamma = 10^{-5}$

Заключения и выводы

Данное исследование посвящено изучению влияния положительно заряженных частиц пыли на ионизационное равновесие в частично ионизованной плазме. Для этого было получено выражение для свободной энергии Гельмгольца четырехкомпонентной водородной плазмы, содержащей свободные электроны, протоны, нейтральные атомы и пылевые частицы. Было использовано то, что свободная энергия Гельмгольца системы содержит идеальную и неидеальную части, которые аддитивно суммируются. В идеальной части свободной энергии Гельмгольца была принята во внимание работа, которую необходимо выполнить для положительной зарядки всех частиц пыли, а неидеальная часть была обработана способом, аналогичным самосогласованной химической модели, ранее разработанной для частично ионизованной плазмы.

В пылевой плазме с положительно заряженными частицами существует две степени ионизации – электронная и протонная, которые соответствуют содержанию свободных электронов и протонов в системе. Так как свободная энергия Гельмгольца была получена, ее двухпараметрическая минимизация позволяет определить равновесное значение степени ионизации протона, которая всегда меньше единицы, а также равновесное значение степени ионизации электрона, которая может превышать единицу

из-за термоэлектронной эмиссии. Отметим, что электрический заряд пылевых частиц не является независимой величиной метода, поскольку он исключается через условие квазинейтральности.

В рамках приближения парных корреляций было изучено поведение радиальных функций распределения и статических структурных факторов, которые имеют немонотонный характер поведения, свидетельствующий о существовании ближнего порядка в расположении соответствующих элементов системы. При этом наблюдается различное поведение структурных факторов в зависимости от роста параметра связи, обусловленное изменением состава плазменной среды.

Была рассчитана корреляционная энергия всей пылевой плазмы, которая является всюду отрицательной и при увеличении параметра связи возрастает практически по гиперболическому закону, что связано с истощением заряженной компоненты среды, а значит существенным уменьшением роли межчастичных взаимодействий. Следует отметить, что корреляционная энергия пылевой плазмы возрастает как с увеличением размера пылевых частиц, так и ростом их концентрации. В первом случае происходит рост заряда пылинок и увеличение концентрации электронов, а во втором заряд пылинок несколько снижается, но существенно сильнее растет концентрация электронов.

Благодарности

Работа выполнена в рамках проекта АР05132677/ГФ грантового финансирования Министерства образования и науки РК на 2018-2020 гг.

Список литературы

1. Fortov V., Ivlev A., Khrapak S., Khrapak A. and Morfill G. Complex (dusty) plasmas: Current status, open issues, perspectives // *Phys. Rep.* – 2005. – Vol.421(1). – P. 1-103.
2. Morfill G. and Ivlev A. Complex plasmas: An interdisciplinary research field // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. 81(4). – P. 1353-1404.
3. Fortov V.E., Khrapak A.G., Khrapak S.A., Molotkov V.I. and Petrov O. Dusty plas-

- mas // *Phys. Usp.* – 2004. – Vol. 47(5). – P. 447-492.
4. Fortov V.E. and Morfill G. *Complex and Dusty Plasmas: From Laboratory to Space.* – CRC Press, 2009. – 440 p.
5. Bouchoule A. *Dusty Plasmas: Physics, Chemistry and Technological Impacts in Plasma Processing.* – Chichester: Wiley, 1999. – 418 p.
6. Shukla P. and Mamun A. *Introduction to Dusty Plasma Physics.* – CRC: Boca Raton, 2015. – 284 p.
7. Mann I. and Meyer-Vernet N. and Czechowski A. Dust in the planetary system: Dust interactions in space plasmas of the solar system // *Phys. Rep.* – 2014. – Vol. 536(1) – P. 1-39.
8. Yousefi R., Davis A.B., Carmona-Reyes J., Matthews L.S., Hyde T.W. Measurement of net electric charge and dipole moment of dust aggregates in a complex plasma // *Phys. Rev. E.* – 2014. – Vol. 90. – P. 033101 (6).
9. Ramazanov T.S., Bastykova N.Kh., Ussenov Y.A., Kodanova S.K., Dzhumagulova K.N., Dosbolayev M.K. The Behavior of Dust particles Near Langmuir Probe // *Contrib. Plasma Phys.* – 2012. – Vol. 52. – P. 110-113.
10. Bonitz M., Henning C., and Block D. Complex plasmas: a laboratory for strong correlations // *Rep. Prog. Phys.* – 2010. – Vol. 73. – P. 066501(29).
11. Khrapak S., Morfill G. Basic processes in complex (dusty) plasmas: Charging, interaction and ion drag force // *Contrib. Plasma Phys.* – 2009. – Vol. 49. – P. 148-168.
12. Shukla P.K., Eliasson B. Fundamentals of dust-plasma interactions // *Rev. Mod. Phys.* – 2009. – Vol. 81. – P. 25-44.
13. Barkan A., D'Angelo N., and Merlino R. Charging of dust grains in a plasma // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – Vol. 73(23). – P. 3093-3096.
14. Gillman E., Williams J., Compton C., and Amatucci W. Microparticle injection effects on microwave transmission through an overly dense plasma layer // *Phys. Plasmas* – 2015. – Vol. 22(4). – P. 043706.
15. Hübner S. and Melzer A. Dust-induced modulation of the atomic emission in a dusty argon discharge // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol. 102(21). – P. 215001(4).

16. Melzer A., Hübner S., Lewerentz L., Matyash K., Schneider R. and Ikkurthi R. Phase-resolved optical emission of dusty rf discharges: Experiment and simulation // Phys. Rev. E – 2011. – Vol. 83(3). – P. 036411(12).
17. Belenguer P., Blondeau J., Boufendi L., Toogood M., Plain A., Bouchoule A., Laure C. and Boeuf J. Numerical and experimental diagnostics of rf discharges in pure and dusty argon // Phys. Rev. A – 1992. – Vol. 46(12). – P. 7923-7933.
18. Schulze M., von Keudell A. and Awakowicz P. Characterization of a rotating nanoparticle cloud in an inductively coupled plasma // Plasma Sources Sci. Technol. – 2006. – Vol. 15(3). – P. 556.
19. Samsonov D. and Goree G. Instabilities in a dusty plasma with ion drag and ionization // Phys. Rev. E – 1999. – Vol. 59(1). – P. 1047-1058.
20. Land W. and Goedheer W. The plasma inside a dust free void: hotter, denser, or both? // New J. Phys. – 2007. – Vol. 9. – P. 246(13).
21. Killer C., Wegner T., Melzer A. and Meichsner J. Influence of dust particles on the bulk electron density in radio frequency plasmas measured by microwave interferometry // Phys. Plasmas – 2015. – Vol. 22(12). – P. 123702(5).
22. Delzanno G. L., Lapenta G. and Rosenberg M. Attractive Potential around a Thermionically Emitting Microparticle // Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92(3). – P. 035002(4).
23. Ebeling W., Kraeft W. D., and Kremp D. Theory of Bound States and Ionization Equilibrium – Berlin: Akademie-Verlag, 1976. – 164 p.
24. Davletov A. E., Kurbanov F. and Mukhametkarimov Y. S. Chemical model for positively charged dust particles // Phys. Plasmas – 2018. – Vol. 25(12). – P. 120701(6).
25. Arkhipov Y. V., Baimbetov F. B., and Davletov A. E., Ionization equilibrium and equation of state of partially ionized hydrogen plasmas: Pseudopotential approach in chemical picture // Phys. Plasmas – 2005. – Vol. 12. – P. 082701 (7).
26. Baimbetov F. B., Davletov A. E., Kudyshev Z. A. and Mukhametkarimov E. S. New Model of Dusty Plasma Particles Interaction // Contrib. Plasma Phys. – 2011. – Vol.51. – P.533.
27. Arkhipov Yu.V., Baimbetov F.B., Davletov A.E. Pseudopotential theory of a partially ionized hydrogen plasma // Contrib. Plasma Phys. – 2003. – Vol. 43. – P. 258-260.
28. Mott N. and Massey H. S. W. Theory of Atomic Collisions – New York: Oxford University Press, 1987 – 858 p.
29. Davletov A.E., Yerimbetova L.T., Mukhametkarimov Ye.S., Ospanova A.K. Finite size effects in the static structure factor of dusty plasmas // Phys. Plasmas. – 2014. – Vol. 21. – P. 073704 (5).
30. Arkhipov Y. V., Baimbetov F. B. and Davletov A. E. Self-consistent chemical model of partially ionized plasmas // Phys. Rev. E – 2011. – Vol. 83(1). – P. 016405(15).

Принято к печати 13.09.2019

Ж.А. Кудышев¹, А.Е. Давлетов², Л.Т. Еримбетова²,
Е.С. Мухаметкаримов², Ф. Курбанов²

¹Школа электротехники и вычислительной техники, Центр нанотехнологий им. Бирка, Университет Пердью, Уэст-Лафайет, Индиана, 47907, США

²Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Республика Казахстан

e-mail: askar@physics.kz

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ

Аннотация. Целью исследования является построение самосогласованной химической модели пылевой плазмы, состоящей из электронов, протонов, нейтральных атомов и пылевых частиц. Предложено выражение для свободной энергии, которое учитывает заряд пылевых частиц и

состоит из идеального и неидеального вкладов. Неидеальная часть свободной энергии рассчитывается в рамках самосогласованной химической модели, которая основывается на обобщенном уравнении Больцмана-Пуассона, полученного из цепочки уравнений Боголюбова для равновесных функций распределения в приближении парных корреляций. В качестве микрopotенциалов взаимодействия электронов и протонов используется кулоновский потенциал, а их взаимодействия с атомами, а также атомов между собой, описываются известными потенциалами Мотта. Существенно, что пылинки имеют конечный размер, что необходимо учитывать в потенциале их взаимодействия между собой, а также с протонами и электронами окружающей плазмы. Продемонстрировано, что свободная энергия рассматриваемой многокомпонентной среды представляет собой функцию только концентрации свободных электронов и протонов, а ее последующая минимизация позволяет определить соответствующие равновесные значения. Это позволяет детально изучить ионизационное равновесие в плазменной среде и одновременно определить заряд пылевых частиц. В рамках приближения парных корреляций становятся известными корреляционные функции системы, к которым относятся радиальные функции распределения и статические структурные факторы, поведение которых может быть изучено в широком диапазоне изменения параметров среды. Знание корреляционных функций системы позволяет в свою очередь рассчитать термодинамические характеристики многокомпонентной пылевой плазмы, что выполнено, в частности, для корреляционной энергии. Полученные данные по калорическому уравнению состояния позволят предсказать новые эффекты при распространении пылевых акустических волн, связанные с перезарядкой пылинок в плазме с изменяющимся ионизационным равновесием.

Ключевые слова: пылевая плазма, химическая модель, радиальные функции распределения, статические структурные факторы, корреляционная энергия.

**Zh.A. Kudyshev¹, A.E. Davletov², L.T. Yerimbetova²,
Ye.S. Mukhametkarimov², F. Kurbanov²**

¹*The School of Electrical and Computer Engineering, Birck Nanotechnology Center, Purdue University, West Lafayette, Indiana, 47907, USA*

²*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
e-mail: askar@physics.kz

THERMODYNAMIC PROPERTIES OF MULTICOMPONENT DUSTY PLASMA

Abstract. The aim of the study is to construct a self-consistent chemical model of dusty plasma, consisting of electrons, protons, neutral atoms and dust particles. An expression for the Helmholtz free energy is proposed to take into account the charge of dust particles and consist of ideal and excess contributions. The excess part of the free energy is calculated in the framework of a self-consistent chemical model, which is based on the generalized Boltzmann-Poisson equation obtained from the chain of Bogolyubov equations for equilibrium distribution functions in the pair correlation approximation. The Coulomb potential is used for the micropotentials of the interaction of electrons and protons, and they assume to interact with atoms as well as atoms with one another via the well-known Mott potentials. It is essential that dust particles have a finite size, which must be taken into account in the potential of their interaction with each other, as well as with protons and electrons of the surrounding plasma. It has been demonstrated that the Helmholtz free energy of the multicomponent medium under consideration is a function of the concentrations of free electrons and protons, and its subsequent minimization provides the corresponding equilibrium values. This allows a detailed study of the ionization equilibrium in a plasma medium and, at the same time, determination of the charge of dust particles. In the framework of the pair correlation approximation, the correlation functions of the system become known, which include the radial distribution functions and static structural factors, whose behavior can be revealed in a wide range of plasma parameters. Knowledge of the correlation functions of the system enables one, in turn, to calculate the thermodynamic characteristics of a multicomponent dusty plasma, which is done, in particular, for the correlation energy. The data obtained on the caloric equation of state will allow

predicting new effects in the propagation of dust acoustic waves associated with the recharging of dust particles in a plasma due to changing ionization equilibrium.

Keywords: dusty plasma, chemical model, radial distribution functions, static structural factors, correlation energy.

**Ж.А. Кудышев¹, А.Е. Давлетов², Л.Т. Еримбетова²,
Е.С. Мухаметкаримов², Ф. Курбанов²**

¹*Электр және компьютерлік инженерия мектебі және Биркнанотехнология орталығы,
Пурдью университеті, Батыс Лафайет, Индиана, 47907, АҚШ*

²*ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан*

e-mail: askar@physics.kz

КӨПКОМПОНЕНТТІ ТОЗАҢДЫ ПЛАЗМАНЫҢ ТЕРМОДИНАМИКАЛЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ

Аннотация. Жұмыстың мақсаты электрондар, протондар, нейтрал атомдар мен тозаңды бөлшектері бар тозаңды плазманың өзара келістірілген химиялық моделін құрастыру болып табылады. Идеалды және идеалды емес бкліктерден тұратын тозаңды бөлшектердің зарядын ескеретін бос энергия үшін теңдік ұсынылды. Бос энергияның идеал емес бөлігі жұпты корреляция жуықтауында Боголюбов теңдеулер тізбектерін шешу арқылы анықталған, жалпыланған Больцман-Пуассон теңдеуіне негізделген өзара келістірілген химиялық моделдің негізінде есептелінеді. Есептеу барысында, электрондар мен протондардың әсерлесу микропотенциалы ретінде кулон потенциалы, ал олардың атомдармен және атомдардың өзара әсерлесу потенциалы ретінде Мотт потенциалы қолданылады. Тозаңды бөлшектердің өлшемі шекті болғандықтан сәйкесті потенциалда олардың бір бірімен, плазмадағы протондар мен электрондармен әсерлесуін ескеру қажет. Қарастырылған көп компонентті ортаның бос энергиясы тек еркін электрондар мен протондардың концентрациясының функциясы ғана болатындығы, ал оның минимизациясы тепе-теңдіктің сәйкес мәндерін анықтауға мүмкіндік беретіні көрсетілген. Бұл плазмалық ортадағы ионизациялық тепе-теңдікті нақты зерттеуге және сонымен бірге тозаң бөлшектердің зарядын анықтауға мүмкіндік береді. Жұптық корреляциялық жуықтау аясында жүйенің корреляциялық функциялары анықталып, олардың құрамына қоршаған ортаның кең параметрлер аумағында зерттеуге болатын радиалды үлестіру функциялары мен статикалық құрылымдық факторлар кіреді. Жүйенің корреляциялық функцияларын білу, өз кезегінде, көп компонентті тозаңды плазманың термодинамикалық сипаттамаларын есептеуге мүмкіндік беретіндіктен, ол корреляциялық функция үшін жасалынды. Күйдің калориялық теңдеуінен алынған мәліметтер ионизациялық тепе-теңдіктің өзгеруімен плазмадағы тозаңды бөлшектерін қайта зарядтауға байланысты тозаңды акустикалық толқындардың таралуындағы жаңа әсерлерді болжауға мүмкіндік береді.

Түйінді сөздер: тозаңды плазма, химиялық модель, радиалды таралу функциялары, статикалық құрылымдық факторлар, корреляциялық энергия.