ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА

Алексеева Л.А., Баегизова А.С.
Институт математики МОН РК, alexeeva@math.kz
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, baegiz_a@mail.ru

В статье на основе метода обобщенных функций разработан метод граничных интегральных уравнений для решения нестационарных краевых задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока с условиями Дирихле или Неймана на границе области определения. Получены динамические аналоги формул Грина для их решений в пространстве обобщенных функций и построены регулярные интегральные представления в плоском и трехмерном случаях. Получены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально-краевых задач.

1. Уравнения Клейна-Гордона-Фока. Ударные волны

Рассматривается *уравнение Клейна-Гордона-Фока:*

$$\Box_c u + q(x)u = f(x,t), \qquad (1.1)$$

Здесь волновой оператор $\Box_c = \Delta - c^{-2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$,

$\Delta = \sum_{k=1}^{N}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ - оператор Лапласа, $x \in R^N$,

$t \in [0,\infty)$, $q(x)$ -- потенциал рассеяния.

Уравнение (1.1) – гиперболического типа. Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\nu_t^2 - c^2\sum_{j=1}^{N}\nu_j^2 = 0, \qquad (1.2)$$

где $\nu(x,t) = \left(\nu_1,...,\nu_N,\nu_t\right)$ - вектор нормали к характеристической поверхности в $R^{N+1} = \{(x,t)\}$, которую обозначим F. Ему соответствует конус характеристических нормалей - *световой* конус, для которого $\nu_t < 0$. На F решение уравнения (1.1) и его производные могут быть разрывны. В R^N характеристической поверхности F соответствует волновой фронт F_t (сечение F при фиксированном t), который движется со скоростью c:

$$c = -\nu_t / \|\nu\|_N, \quad \|\nu\|_N = \sqrt{\nu_j \nu_j} \qquad (1.3)$$

(здесь и далее всюду для сокращения записи по повторяющимся индексам в произведении проводится суммирование от 1 до N подобно тензорной свертке).

Такие решения (1.1) называют *ударными волнами*. Поскольку (1.2) совпадает с характеристическим уравнением классического волнового уравнения Даламбера, если решение (1.1) непрерывно:

$$\left[u(x,t)\right]_{F_t} = 0 \qquad (1.4)$$

то на волновых фронтах выполняются условия непрерывности Адамара на скачки: для $x \in F_t$

$$\left[\dot{u} n_j + c u,_j\right]_{F_t} = 0, \qquad j = \overline{1,N}; \qquad (1.5)$$

$$\left[\dot{u} + c n_j u,_j\right]_{F_t} = 0, \qquad (1.6)$$

где $n(x,t)$ – *волновой вектор* -- единичный вектор нормали к F_t, направленный в сторону распространения фронта волны. Очевидно, что

$$n_i = \nu_i / \|\nu\|_N, \quad i = \overline{1,N}; \qquad (1.7)$$

Здесь и далее для сокращения записи символом после запятой обозначаем соответствующую частную производную:

$$u,_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Условия (1.5) являются следствием условия непрерывности (1.4) и обеспечивают непрерывность на F_t касательных производных u.

Условие (1.5) – это закон сохранения импульса на фронтах ударных волн. Если перед фронтом волны $u \equiv 0$, то на фронте волны:

$$(grad\, u, n) = -c^{-1}\dot{u}, \quad x \in F_t$$

Для исследования решений КГФ-уравнения удобно использовать аппарат теории обобщенных функций, который позволяет расширить класс решений (1.1), включая ударные волны, а также рассматривать сингулярные решения из класса обобщенных функций, типичных для задач математической физики. Для этого рассмотрим (1.1) на пространстве обобщенных функций $D'(R^{N+1})$ - пространстве линейных непрерывных функционалов на пространстве основных функций $D(R^{N+1})$. В качестве последнего возьмем пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций [1]. Далее обычную локально интегрируемую функцию $f(x,t)$ будем помечать шапочкой $\hat{f}(x,t)$, если будем рассматривать ее как обобщенную.

Если *u* имеет конечный разрыв на *F*, то в $D'(R^{N+1})$, согласно правилам определения обобщенной производной,

$$\hat{u},_j = u,_j + [u]_F \nu_j \delta_F\,, \qquad (1.8)$$

где первое слагаемое справа - классическая производная по x_j $\|\mathbf{v}\| = 1$, δ_F - простой слой на F - сингулярная обобщенная функция [1].

О п р е д е л е н и е. Решения уравнения (1.1) *u*(*x,t*), которые непрерывны вместе с производными до второго порядка включительно почти всюду, за исключением конечного или счетного числа поверхностей разрыва - волновых фронтов, достаточно гладких почти всюду, на которых выполнены условия на скачки (1.5), (1.6), назовем *классическими*.

Л е м м а 1.1. *Если u - классическое решение* (1.1), *то $\hat{u}$ является его обобщенным решением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (1.8) можно последовательно определить вторые производные. С учетом этих равенств и (1.3), получим

$$(\Box_c + q(x))\hat{u} = f(x,t) +$$

$$+\left\{c^{-1}\left[u,_t\right]_{F_t} + \left[n_j u,_j\right]_{F_t}\right\}\|\nu\|_N \delta_F +$$

$$c^{-1}\partial_t\left\{\|\nu\|_N [u]_{F_t}\delta_F\right\} + \partial_j\left\{\|\nu\|_N [u]_{F_t} n_j \delta_F\right\}$$

В силу (1.4) и (1.6) плотности простых и двойных слоев здесь справа равны нулю. Что и требовалось доказать.

Замечание 1. Из этой леммы следует, что условия на фронтах ударных волн легко получить, рассматривая классические решения гиперболических уравнений как обобщенные. Достаточно приравнять нулю плотности соответствующих независимых сингулярных обобщенных функций - аналогов простых, двойных и др. слоев, возникающих при обобщенном дифференцировании решений. Определение таких условий на основе классических методов весьма трудоемкая процедура.

2. Постановка нестационарных краевых задач для КГФ-уравнения. Закон сохранения энергии

Пусть в области $S^- \in R^N$, ограниченной поверхностью *S*, строится решение (1.1) *u*(*x,t*) при $t \ge 0$. Введем обозначения: *m*(*x*) - вектор внешней нормали к *S*, $\dfrac{\partial u}{\partial m} = u,_j m_j$ - производная *u* по нормали m на *S*, $u,_t = \dot{u}$. При $t = 0$ заданы *начальные условия:*

$$u(x,0) = u_0(x) \;\text{ для }\; x \in S^- + S\,, \qquad (2.1)$$

$$u,_t(x,0) = v_0(x) \;\text{ для }\; x \in S^- \qquad (2.2)$$

Здесь рассмотрим две *краевые задачи* (**КЗ**), соответствующие условиям Дирихле и Неймана:

(КЗ I) $\quad u(x,t) = u_S(x,t)$, для $x \in S$, (2.3)

(КЗ II) $\quad \dfrac{\partial u}{\partial n} = p(x,t)$. для $x \in S$. (2.4)

На фронтах ударных волн выполняются условия Адамара (1.5), (1.6) на скачки. Заметим, что ударные волны всегда возникают, если не выполнено условие согласования начальных и граничных данных по скоростям

$$u_S,_t(x,0) = v_0(x), \quad x \in S \qquad (2.5)$$

что типично для физических задач. В этом случае в начальный момент времени на границе *S* формируется фронт ударной волны, который распространяется со скоростью *c* в S^-. Для построения непрерывно дифференцируемых решений это условие является необходимым. Здесь мы его вводить не будем.

Предполагается, что

$u_0(x) \in C(S^- + S)$, $v_0(x) \in L_1(S^- + S)$,

$p(x,t) \in L_1(D)$ и $u_S(x,t)$ - гельдерова на S:

$\forall\beta,\ 0<\beta\le 1$, такое, что для $\forall x\in S$, $y\in S, t\ge 0$

$$|u_S(x,t)-u_S(y,t)|\le const\|x-y\|^{\beta}, \qquad (2.6)$$

Здесь $L_1(...)$ - пространство суммируемых на указанном множестве функций.

Введем плотность энергии поля E и функцию Лагранжа L:

$$E=0,5\left(u,_t^2+c^2\sum_{j=1}^{N}u,_j^2\right),$$

$$L=0,5\left(u,_t^2-c^2\sum_{j=1}^{N}u,_j^2\right).$$

Л е м м а 2.1. *Если* u *- классическое решение КГФ-уравнения* (1.1), *то на фронтах ударных волн выполняются следующие условия на скачки*:

$$[E]_{F_t}=-c\left[\dot u\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{F_t}$$

$$[L(x,t)]_{F_t}=\left(\dot u^-+c\frac{\partial u^-}{\partial n}\right)[\dot u]_{F_t}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко показать, что для скачков выполняется равенство:

$$[ab]=a^+[b]+b^-[a],$$

где знаком плюс и минус обозначены предельные значения функций a и b на фронте волны со стороны волнового вектора и противоположной. Используя это равенство и условия Адамара (1.4) и (1.5), получим

$$\left[E+c\dot u\frac{\partial u}{\partial n}\right]=c^2\left[0,5\left(c^{-1}\dot u^2+cu,_j u,_j\right)+\dot u\frac{\partial u}{\partial n}\right]=...=$$

$$=0,5c[\dot u]\left(\dot u^-+cu,_j^- n_j\right)+0,5c^2\left[u,_j\right]\left(cu,_j^-+\dot u^- n_j\right)=$$

$$=0,5c^3u,_j^-\left[u,_j+c^{-1}n_j\dot u\right]+0,5c\dot u^-\left[cn_j u,_j+\dot u\right]=0$$

Здесь n - нормаль к фронту в R^N. Отсюда следует первая формула леммы. Далее, поскольку $[a^2]=\left(a^++a^-\right)[a]$ находим,

$$[L]=0,5\left(u,_t^++u,_t^-\right)[u,_t]-$$
$$-0,5c^2\left(u,_j^++u,_j^-\right)[u,_j]=...=$$
$$=0,5\left\{\left(u,_t^++cn_ju,_j^+\right)+\left(u,_t^-+cn_ju,_j^-\right)\right\}[u,_t]=$$
$$=\left(\dot u^-+c\frac{\partial u^-}{\partial n}\right)[\dot u]$$

Лемма доказана.

Следствие. Если перед фронтом волны $u\equiv 0$, то, в силу (1.6), $\left[L(x,t)\right]_{F_t}=0$, т.е. L непрерывна.

Обозначим D={$S\times R^+$}-- боковую поверхность пространственно-временного цилиндра $D^-=S^-\times R^+$, $R^+=(0,+\infty)$.

Т е о р е м а 2.1. (закон сохранения энергии). *Если* $u(x,t)$ *- классическое решение краевой задачи, то*

$$\int_{S^-}\left(E(x,t)-E_0(x)\right)dV(x)+$$
$$+0,5c^2\int_{S^-}q(x)\left(u^2(x,t)-u_0^2(x)\right)dV(x)=$$
$$=-c^2\int_0^t dt\int_{D^-}f(x,t)u,_t\,dV(x)+$$
$$+c^2\int_0^t\int_S\left(\dot u_S(x,t)p(x,t)\right)dS(x)dt$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая (1.1) на $u,_t$ в области дифференцируемости решения, после простых преобразований получим:

$$\left(c^{-2}E+q(x)m^2u^2\right),_t-(u,_t u,_j),_j=-u,_t f \qquad (2.7)$$

Теперь проинтегрируем (2.7) по области D^-, с учетом разбиения области интегрирования волновыми фронтами F_k. Заметим, что первые два слагаемые можно рассматривать как дивергенцию соответствующего вектора в пространстве R^{N+1}, которая в областях между фронтами непрерывна. Поэтому, используя теорему Остроградского–Гаусса в R^{N+1}, получим

$$\int_{D^-}\left(c^{-2}E+\frac{1}{2}q(x)u^2\right),_t dV(x,t)-\int_{D^-}(\dot u u,_j),_j\,dV(x,t)+$$

$$+\int_{D^-}\dot uf(x,t)dV(x,t)=\int_{D^-}\dot uf(x,t)dV(x,t)+$$

$$+\int_{S^-}\left\{c^{-2}\left(E(x,t)-E_0(x)\right)+\frac{1}{2}q(x)\left(u^2(x,t)-u_0^2(x)\right)\right\}dV(x)-$$

$$-\int_0^t\int_S\left(\dot u\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS(x)dt+\sum_{F_k}\int_{F_k}\left[c^{-2}E\nu_t-\frac{\partial u}{\partial\nu}\dot u\right]_{F_k}dF_k(x,t)=0$$

Здесь и далее

$dV(x)=dx_1...dx_N$, $dV(x,t)=dV(x)dt$

$dF_k(x,t)$ – дифференциал площади поверхности в соответствующей точке волнового фронта.

В силу (1.3) и леммы 2.1,

$$\left[c^{-2}E\nu_t - \dot{u}u,_j \nu_j\right]_{F_k} = -\|\nu\|_N c^{-1}\left[E + c\dot{u}\frac{\partial u}{\partial n}\right] = 0.$$

Поэтому последний интеграл равен нулю. С учетом обозначений для граничных функций, отсюда получаем формулу теоремы.

Замечание. Условие на скачок плотности энергии на фронте ударной волны легко можно получить, рассматривая соответствующее энергии уравнение в $D'(R^{N+1})$, которое имеет вид:

$$c^{-2}\hat{E},_t - (\dot{u}\,u,_j),_j + \dot{u}\,f =$$

$$= \left\{c^{-2}\left[E\right]\nu_t - \left[\dot{u}\,u,_j\right]\nu_j\right\}\delta_F =$$

$$= -\|\nu\|_N \left\{c^{-1}\left[E\right] + \left[\dot{u}\,u,_j\right]n_j\right\}\delta_{F_t}$$

Чтобы правая часть обращалась в ноль, необходимо

$$\left[E\right] + c\left[\dot{u}u,_j\right]n_j = 0$$

Последнее совпадает с формулой леммы 2.1. теоремы 2.1.следует теорема 2.2.

Т е о р е м а 2.2. *Если* $q(x) \ge 0$*, то классическое решение первой (второй) краевой задачи для КГФ - уравнения единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности задачи достаточно доказать единственность нулевого решения. Для него f=0, начальные и соответствующие граничные условия нулевые. Тогда легко видеть, что из теоремы 2.1 следует:

$$\int_{S^-}\left\{E(x,t) + 0{,}5c^2 q(x)u^2(x,t)\right\}dV(x) = 0.$$

Т.к. оба слагаемых неотрицательны, следовательно $E = 0, u = 0$. Теорема доказана.

3. Динамический аналог формулы Грина при постоянном потенциале рассеяния

Рассмотрим случай, когда $q(x) = \pm m^2$ - константа. Для построения решения краевых задач перейдем в пространство обобщенных функций. Для этого введем характеристическую функцию области определения решения $H_D^-(x,t) \equiv H_S^-(x)H(t)$, где $H_S^-(x)$ - характеристическая функция множества S^- равная 0,5 на его границе S, $H(t)$ - функция Хевисайда, равная 0,5 при t=0. H_D^- - характеристическая функция пространственно-временного цилиндра D^-. Легко показать, что

$$\frac{\partial H_D^-}{\partial x_j} = -n_j\delta_S(x)H(t), \quad \frac{\partial H_D^-}{\partial t} = -n_j H_S^-(x)\delta(t) \tag{3.1}$$

где $\delta(t)$ -- функция Дирака.

Чтобы использовать методы теории обобщенных функций, доопределим решение нулем вне области определения решения краевой задачи. Для этого введем регулярные обобщенные функции:

$$\hat{u} = u(x,t)H_D^-(x,t), \quad \hat{f} = f(x,t)H_D^-(x,t), \tag{3.2}$$

где $u(x,t)$ - классическое решение задачи.

Рассмотрим действие КГФ-оператора на $\hat{u}$. Поскольку, $[u]_S = -u$, выполняя обобщенное дифференцирование, подобно тому, как в разделе 1, и используя (2.11), получим

$$\Box_c\hat{u} \pm m^2\hat{u} = -\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)H(t) - H(t)\left(un_j\delta_S(x)\right),_j -$$

$$-c^{-2}H_S^-(x)u_0(x)\dot{\delta}(t) - c^{-2}H_S^-(x)\dot{u}_0(x)\delta(t) + \hat{f}(x,t), \tag{3.3}$$

где $\beta(x,t)\delta_S(x)H(t)$ - простой слой на боковой поверхности цилиндра $D = \left\{S \times R^+\right\}$.

Заметим, что плотности простых и двойных слоев здесь определяются граничными условиями, часть из которых (в зависимости от решаемой краевой задачи) известна, и заданными начальными условиями.

Решением уравнения (3.3) является свертка правой части уравнения с его фундаментальным решением $\hat{U}(x,t)$, удовлетворяющее условиям:

$$\Box_c\hat{U} \pm m^2\hat{U} = \delta(x)\delta(t), \tag{3.4}$$

и *условиям излучения*

$$\hat{U} = 0 \text{ при } t < 0, \quad \hat{U} = 0 \text{ при } \|x\| > ct. \tag{3.5}$$

Назовем его *функцией Грина* уравнения (1.1).

Решение (3.3) получим в виде следующей свертки обобщенных функций:

$$\hat{u}=u(x,t)H_S^-(x)H(t)=-\hat{U}*\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)H(t)-$$

$$-\left(\hat{U}*un_j\delta_S(x)H(t)\right),_j-\frac{1}{c^2}\left(\hat{U}\underset{x}{*}H_S^-(x)u_0(x)\right),_t-$$

$$-c^{-2}\hat{U}\underset{x}{*}H_S^-(x)\dot{u}_0(x)+\hat{f}(x,t)*\hat{U} \qquad (3.6)$$

где символ "$\underset{x}{*}$" означает, что свертка берется только по x. Причем решение единственно в классе функций, допускающих свертку с U. Отсюда легко получить решение задачи Коши (в отсутствии S, $S^-=R^N$).

Следствие 3.1. Обобщенное решение задачи Коши имеет вид:

$$\hat{u}(x,t)=-c^{-2}\hat{U}\underset{x}{*}\dot{u}_0-c^{-2}\left(\hat{U}\underset{x}{*}u_0\right),_t+\hat{f}*\hat{U} \quad (3.7)$$

Следствие 3.2. При нулевых начальных данных и $f=0$, обобщенное решение имеет вид:

$$\hat{u}=-\hat{U}*\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)H(t)-\hat{U},_j*un_j\delta_S(x)H(t) \qquad (3.8)$$

Формулы (3.6), (3.8) выражают решение краевых задач через граничные значения искомой функции и ее производной по нормали к границе, т.е. они подобны формуле Грина для решений уравнения Лапласа. Однако, в силу особенностей фундаментальных решений гиперболических уравнений на фронте волны, вид которых зависит от размерности пространства, их интегральное представление дает расходящиеся интегралы, содержащие производные от фундаментального решения. Для построения регулярного интегрального представления введем функции - первообразные по t:

$$\hat{W}=\hat{U}*\delta(x)H(t)=\hat{U}\underset{t}{*}H(t) \qquad (3.9)$$

$$\partial_t\hat{W}=\hat{U}\,; \qquad (3.10)$$

$$\hat{H}(x,n,t)=\frac{\partial\hat{W}}{\partial x_j}n_j=\frac{\partial\hat{W}}{\partial n} \qquad (3.11)$$

Легко видеть, что $\hat{W}$ и $\hat{H}$ также являются решениями (1.1) при

$$\hat{f}=H(t)\delta(x) \text{ и } \hat{f}(x,t)=H(t)\frac{\partial\delta(x,t)}{\partial n}$$

соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Обобщенное решение краевых задач удовлетворяет уравнению*:

$$\hat{u}=-\hat{U}*\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)H(t)-\hat{W},_j*\dot{u}n_j(x)\delta_S(x)H(t)-$$

$$-\hat{W},_j\underset{x}{*}u_0(x)n_j(x)\delta_S(x)-c^{-2}\hat{U}\underset{x}{*}H_S^-(x)\dot{u}_0(x)-$$

$$-c^{-2}\left(\hat{U}\underset{x}{*}H_S^-(x)u_0(x)\right),_t+\hat{f}*\hat{U} \qquad (3.12)$$

Доказательство. Легко показать, пользуясь определением производной обобщенной функции и непрерывностью u, что

$$\left(un_j\delta_S(x)H(t)\right),_t=\dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)H(t)+$$
$$+u(x,0)n_j(x)\delta_S(x)\delta(t)$$

Используя это равенство и свойство дифференцирования свертки, имеем

$$\left(\hat{U}*un_j\delta_S(x)H(t)\right),_j=\left(\hat{W},_t*un_j\delta_S(x)H(t)\right),_j=$$
$$=\hat{W},_j*\dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)H(t)+$$
$$+\hat{W},_j*u(x,0)n_j(x)\delta_S(x)\delta(t)$$

Поскольку

$$\hat{W},_j*u(x,0)n_j(x)\delta_S(x)\delta(t)=$$
$$=\hat{W},_j\underset{x}{*}u_0(x)n_j(x)\delta_S(x),$$

подставляя эти соотношения в (3.6), получим формулу теоремы.

Из теоремы 3.1 следует, что решение задачи полностью определяется начальными данными, граничными значениями нормальной производной функции $u(x,t)$ и ее скорости $\dot{u}=u,_t=\partial_t u$. По аналогии с представлением решений уравнения Лапласа, эти формулы можно назвать *динамическим аналогом формулы Грина*.

Формула (3.12) позволяет сразу перейти к ее интегральной записи без регуляризации подынтегральных функций на фронтах.

Далее рассмотрим представление решений КЗ для КГФ - уравнений в пространствах размерностей N=2,3, характерных для задач математической физики. Чтобы избежать громоздкости формул при построении интегрального представления динамического аналога формулы Грина рассмотрим последовательно решения двух краевых задач:

1. *Задача Коши при* $f(x,t) \neq 0$*;*
2. *Краевая задача при нулевых начальных условиях и* $f(x,t) = 0$.

В силу линейности уравнений, решение поставленных краевых задач можно получить суперпозицией решений этих краевых задач с поправкой граничных условий для второй задачи с учетом граничных значений решения задачи Коши. Решение задачи Коши для этого уравнения ранее получено В.С. Владимировым (см.[2]). Получим его здесь также для полного решения начально-краевой задачи в принятых здесь обозначениях.

4. Обобщенное решение задачи Коши для КГФ-уравнения при N=2

Рассмотрим задачу Коши для КГФ-уравнения вида:

$$\square_c \hat{u} \pm m^2 \hat{u} = \hat{f}(x,t) \qquad x \in R^N, t > 0 \qquad (4.1)$$

где $\hat{f}(x,t)$, вообще говоря, обобщенная функция.

Введем обозначения:

$dV(y) = dy_1 ... dy_N$, $S_t^-(x) = \left\{ y \in S^-, r < ct \right\}$,

$S_t(x) = \left\{ y \in S,\ r < ct \right\}$, $r = \left\| y - x \right\|$,

которые будем использовать далее.

В плоском случае N=2. При $q(x) = -m^2$ функция Грина уравнения (4.1) – регулярная обобщенная функция вида:

$$\hat{U} = \frac{H(ct - \|x\|)}{2\pi} \frac{ch\left(m\sqrt{c^2t^2 - \|x\|^2} \right)}{\sqrt{c^2t^2 - \|x\|^2}} \qquad (4.2)$$

со слабой особенностью на фронте $\|x\| = ct$:

$$\hat{U} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{c^2t^2 - \|x\|^2}} \quad \text{при } \|x\| \to ct - 0 \quad (4.3)$$

Ее носителем является световой конус $\|x\| \le ct$.

Т е о р е м а 4.1. *Если* $u_0(y)$, $\dot{u}_0(y)$ - *интегрируемые функции, то решение задачи Коши для уравнения* (4.1) *при N*=2 *имеет вид:*

$$2\pi c^2 u(x,t) H(t) =$$

$$= \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{ch\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2} \right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \dot{u}_0(y) dV(y) +$$

$$+ \partial_t \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{ch\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2} \right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} u_0(y) dV(y) -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_\tau^-(x)} \frac{ch\left(m\sqrt{c^2\tau^2 - r^2} \right)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} f(y, t-\tau) dV(y)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегральная запись формулы (3.7) приводит к формуле теоремы. Все интегралы собственные в силу регулярности подынтегральных функций. Носитель ядра интегралов это расширяющийся со временем круг с центром в точке *x*.

Заметим, что если начальные функции и правая часть уравнения (1.1) (*источник*) принадлежат классу сингулярных функций, допускающих свертку с функцией Грина уравнения для построения решения задачи Коши следует использовать формулу (3.7) и (4.2).

Аналогично, строится решение задачи Коши в случае $q(x) = m^2$. Решение задачи в этом случае допускает аналитическое продолжение. Его можно получить из решения в теореме 4.1 заменой m на im.

5. Обобщенное решение задачи Коши для КГФ-уравнения при N=3

Для N=3 функция Грина (4.1) (при $q(x) = m^2$) сингулярная обобщенная функция вида:

$$4\pi\hat{U} = cH(t)\delta(c^2t^2 - r^2) - mcf_0(r,t) \qquad (5.1)$$

где $r = \|x\|$, $H(t)\delta(c^2t^2 - r^2)$ -- *простой слой на световом конусе* $r = ct$, f_0 *определяется выражением:*

$$f_0(r,t) = \frac{H(ct - r) J_1\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2} \right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \qquad (5.2)$$

$J_1(...)$ -- функция Бесселя. Так как [3]

$$J_1(z) \sim 0{,}5z \quad \text{при } z \to 0 \tag{5.3}$$

на фронте $r = ct$ второе слагаемое имеет конечный скачок:

$$\left[f_0(r, r/c)\right] = -\frac{m}{2} \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Решение задачи Коши для КГФ-уравнения* (4.1) *при N*=3 *имеет вид:*

$$4\pi c u(x,t) = (2ct)^{-1} \int\limits_{r=ct} \dot{u}_0(y)\, dS(y) -$$

$$-m \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{J_1\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \dot{u}_0(y)\, dV(y) +$$

$$+\frac{1}{2ct^2} \int\limits_{r=ct} u_0(y)\, dS(y) + \frac{1}{2ct}\partial_t \int\limits_{r=ct} u_0(y)\, dS(y) -$$

$$-m\partial_t \left\{ \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{J_1\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} u_0(y)\, dV(y) \right\} -$$

$$-mc^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_\tau^-\{x\}} \frac{f(y, t-\tau) J_1(m\sqrt{c^2\tau^2 - r^2})}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} dV(y) +$$

$$+0{,}5c \int\limits_{S_t^-\{x\}} r^{-1} f(y, t-\tau)\, dV(y)$$

Доказательство следует из представления обобщенного решения для задачи Коши с учетом вида фундаментального решения (4.3).

Решение задачи Коши для уравнения (4.1) в случае $q(x) = -m^2$ также допускает аналитическое продолжение заменой m на im. Оно имеет вид:

$$4\pi c u(x,t) = \frac{1}{2t} \int\limits_{r=ct} \dot{u}_0(y)\, dS(y) -$$

$$-m \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{I_1\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \dot{u}_0(y)\, dV(y) +$$

$$+\frac{1}{2ct^2} \int\limits_{r=ct} u_0(y)\, dS(y) + \frac{1}{2ct}\partial_t \int\limits_{r=ct} u_0(y)\, dS(y) -$$

$$-m\partial_t \left\{ \int\limits_{S_t^-(x)} \frac{I_1\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} u_0(y)\, dV(y) \right\} +$$

$$+\frac{c}{2} \int\limits_{S_t^-(x)} r^{-1} f(y, t - \frac{r}{c})\, dV(y) -$$

$$-mc^2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{S_\tau^-(x)} \frac{f(y, t-\tau) I_1\left(m\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}} dV(y).$$

В случае, если начальные функции и правая часть уравнения (1) (*источник*) принадлежат классу сингулярных функций, допускающих свертку с функцией Грина уравнения (4.1), для построения решения следует использовать формулу в сверточном виде (3.7).

Построим решения краевых задач.

6. Сингулярные уравнения плоских начально-краевых задач

Рассмотрим решения поставленных краевых задач в случае N=2. Для интегрального представления динамического аналога формулы Грина вычислим $\hat{W}$ и $\hat{H}$:

$$\hat{W} = \frac{1}{2\pi} d_0(r,t) * H(t) = \frac{1}{2\pi c} d_1(r,t), \tag{6.1}$$

$$\hat{H}(x,t,n) = \frac{1}{2\pi c} d_2(r,t) \frac{\partial r}{\partial n}, \quad r = \|x\|, \tag{6.2}$$

где

$$d_0(r,t) = H(ct - r) \frac{ch\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{\sqrt{c^2t^2 - r^2}},$$

$$d_1(r,t) = H(ct - r) \int\limits_0^{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \frac{ch(mz)}{\sqrt{z^2 + r^2}} dz,$$

$$d_2(r,t) = -H(ct - r) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{ch\left(m\sqrt{c^2t^2 - r^2}\right)}{ct} \right\} -$$

$$-H(ct - r) r \int\limits_0^{\sqrt{c^2t^2 - r^2}} \frac{ch(mz)}{\left(\sqrt{z^2 + r^2}\right)^3} dz.$$

Рассмотрим значения этих функций на фронте $r = ct$, $t > 0$. Из (4.2), (3.11) следует, что

$$W\big|_{r=ct} = 0, \quad H\big|_{r=ct} = 0, \tag{6.3}$$

Следовательно, в отличие от U, W и H непрерывны на фронте. При $r \to 0$ имеет место асимптотическое представление:

$$U = \frac{ch(mct)}{2\pi ct} + O(r), \quad H = -\frac{1}{2\pi cr}\frac{\partial r}{\partial n} + O(1). \tag{6.4}$$

Теперь перейдем к интегральной записи динамического аналога формулы Гаусса для *N*=2.

Теорема 6.1. *Решение начально-краевой задачи для КГФ-уравнения в плоском случае представимо: для* $x \notin S$ *в виде*

$$2\pi u(x,t)H(t) =$$

$$= \int_{S_t(x)} H(ct-r)dS(y)\int_{\frac{r}{c}}^{t}\left\{d_2(r,\tau)\frac{\partial r}{c\partial n(y)}\dot{u}(y,t-\tau)\right\}d\tau -$$

$$- \int_{S_t(x)} H(ct-r)dS(y)\int_{\frac{r}{c}}^{t} d_0(r,\tau)p(y,t-\tau)d\tau;$$

а для $x \in S$ *в виде*

$$\pi c u(x,t)H(t) =$$

$$= V.P.\int_{S_t(x)} H(ct-r)\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{r/c}^{t} d_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)d\tau -$$

$$-c\int_{S_t(x)} H(ct-r)dS(y)\int_{r/c}^{t} d_0(r,\tau)p(y,t-\tau)d\tau,$$

$$r = \|y-x\|.$$

Доказательство. В плоском случае формулу теоремы 3.1, с учетом носителей ядер, можно записать в интегральном виде:

$$2\pi\hat{u}(x,t) =$$

$$= \int_{S_t(x)} H(ct-r)dS(y)\int_{r/c}^{t} H(x,y,\tau,n(y))\dot{u}(y,t-\tau)d\tau -$$

$$-H(t)\int_{S_t(x)} H(ct-r)dS(y)\int_{r/c}^{t} U(x,y,\tau)\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}d\tau.$$

Подставляя вид ядер (6.2), получим первую формулу теоремы. Для $x \notin S$, все интегралы сходящиеся, т.к. $r \neq 0$, а U имеет интегрируемую особенность на фронте (4.3).

Докажем вторую формулу для $x^* \in S$. Запишем аналог формулы Грина для области с выколотой ε- окрестностью точки x^*. Обозначим

$$\Gamma_\varepsilon^-(x) = \{y \in S^- : \|y - x^*\| = \varepsilon\},$$

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in S : \|y - x^*\| < \varepsilon\}, \quad \Omega_\varepsilon(x^*) =$$

$$= \{S_t(x^*) - O_\varepsilon(x^*)\} \cup \Gamma_\varepsilon^-(x^*).$$

Поскольку x^* вне области, ограниченной составным контуром $\Omega_\varepsilon(x^*)$:

$$\sum\nolimits_{1\varepsilon} + \sum\nolimits_{2\varepsilon} =$$

$$= \int_{\Omega_\varepsilon(x^*)} H(ct-r)\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{r^*/c}^{t} d_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)\frac{d\tau}{c} -$$

$$- \int_{\Omega_\varepsilon(x^*)} H(ct-r)dS(y)\int_{r/c}^{t} d_0(r,\tau)p(y,t-\tau)d\tau = 0.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to +0$. На $\Gamma_\varepsilon^-(x^*)$ $r = \varepsilon$, дифференциал длины дуги в полярных координатах: $dS(y) = \varepsilon d\varphi$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} H(ct-\varepsilon)dS(y)\int_{\varepsilon/c}^{t} d_0(\varepsilon,\tau)p(y,t-\tau)d\tau =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\pi\int_{\varepsilon/c}^{t}\left\{\frac{ch(mc\tau)}{c\tau}p(x^*,t-\tau)\right\}d\tau =$$

$$= \pi c\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\int_{1}^{ct/\varepsilon}\left\{\frac{ch(m\varepsilon\tau)}{\tau}p\left(x^*,t-\frac{\varepsilon}{c}\tau\right)\right\}d\tau = 0$$

Последнее равенство имеем в силу

$$\left|\int_{1}^{ct/\varepsilon}\left\{\frac{ch(m\varepsilon\tau)}{\tau}p\left(x^*,t-\frac{\varepsilon}{c}\tau\right)\right\}d\tau\right| \le$$

$$\le ch(mct)\int_{0}^{\infty}|p(x^*,\tau)|d\tau.$$

Рассмотрим предел первого интеграла:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\nolimits_{1\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega_\varepsilon(x^*)} H(ct-r)\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{r^*/c}^{t} d_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)\frac{d\tau}{c} =$$

$$= V.P.\int_{S_t(x^*)} H(ct-r)\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{r^*/c}^{t} d_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)\frac{d\tau}{c} -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)} H(ct-r)\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{\frac{r}{c}}^{t} d_2(r,\tau)\dot u(y,t-\tau)\frac{d\tau}{c}=$$

$$=I_S+\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon$$

Вычислим последний предел в правой части.

Поскольку на $\Gamma_\varepsilon^-(x^*)$ $\dfrac{\partial r}{\partial n}=-1\Rightarrow$

$H=\dfrac{1}{2\pi c\varepsilon}+O(1)$, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*)}\frac{\partial r}{\partial n(y)}dS(y)\int_{\varepsilon/c}^{t} d_2(\varepsilon,\tau)\dot u(x^*,t-\tau)\frac{d\tau}{c}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\pi\varepsilon\int_{\varepsilon/c}^{t}\frac{\dot u(x^*,t-\tau)}{\varepsilon}d\tau=\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t \dot u(x^*,t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\pi\left(u(x^*,0)-u(x^*,t)\right)=-\pi u(x^*,t)$$

Складывая, с учетом последнего равенства, получим вторую формулу теоремы. Теорема доказана.

В случае первой краевой задачи ГИУ левая часть уравнения теоремы 6.1 и первый интеграл справа известны, определяются граничными условиями. Решая его, определяем нормальную производную искомой функции на границе, после чего формула теоремы позволяет вычислить решение в любой точке области определения. В случае второй краевой задачи имеем ГИУ для определения неизвестных граничных значений искомой функции u по граничным значениям ее нормальной производной. Решая его, определяем ее значения на границе, после чего определяем решение.

7. Динамический аналог формулы Грина для решений КГФ - уравнения (N=3)

Для построения динамического аналога формулы Грина в интегральном виде определим $\hat W$ и $\hat H$. Вычисляя по формулам (3.9), (3.11), после некоторых преобразований, получим

$$4\pi c^2\hat W=\frac{H(ct-\|x\|)}{\|x\|}-mf_1(\|x\|,t),\qquad(7.1)$$

$$\hat H(x,n,t)=-\frac{(x,n)}{2r}\times$$

$$\times\left(\frac{\delta(ct-r)}{r}+\frac{H(ct-r)}{r^2}+2mf_2(r,t)\right),$$

$$f_1(r,t)=H(ct-r)\int_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\frac{J_1\left(\frac{m}{c}z\right)}{\sqrt{z^2+r^2}}dz,$$

$$f_2(r,t)=rH(ct-r)\int_0^{\sqrt{c^2t^2-r^2}}\frac{J_1\left(\frac{m}{c}z\right)}{\left(\sqrt{z^2+r^2}\right)^3}dz+$$

$$+\frac{rH(ct-r)}{ct\sqrt{c^2t^2-r^2}}J_1\left(\frac{m}{c}\sqrt{c^2t^2-r^2}\right),\quad r=\|x\|.\qquad(7.2)$$

Значения этих функций на фронте $r=ct$:

$$f_1(r,r/c)=0,\quad f_2(r,r/c)=\frac{m}{2c}$$

Следовательно, W непрерывна на фронте волны, последнее слагаемое в представлении H имеет на фронте разрыв первого рода.

При $r\to 0,\ t>0$ верны следующие асимптотики:

$$\hat W(x,t)=\frac{H(t)}{8\pi c^2 r}+O(1)\qquad(7.3)$$

$$\hat H(x,n,t)=\frac{(e_x,n)}{8\pi c^2r^2}H(t)+O(r^{-1})\qquad(7.4)$$

Введем обозначения: $U(x,y,t)=\hat U(x-y,t)$,

$$W(x,y,t)=\hat W(x-y,t),$$

$$H(x,y,t,n)=\hat H(x-y,t,n)$$

Теорема 7.1. *Обобщенное решение краевых задач для однородного КГФ - уравнения, удовлетворяющее нулевым начальным условиям* $(u(x,0)=0,\dot u(x,0)=0)$, *представимо в виде:*

$$4\pi\hat u(x,t)=-H(t)\int_{S_t(x)}\frac{1}{r}\frac{\partial u\left(y,t-\frac{r}{c}\right)}{\partial n(y)}dS(y)-$$

$$-c^{-1}H(t)\int_{S_t(x)}\dot u\left(y,t-\frac{r}{c}\right)\frac{(y-x,n(y))}{r^2}dS(y)+$$

$$+mc^{-1}H(t)\int\limits_{S_t^-(x)} f_0(r,r/c)\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}dV(y)+$$

$$+mH(t)\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)} f_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)\quad dS(y)+$$

$$+H(t)\int\limits_{S_t(x)} u\left(y,t-\frac{r}{c}\right)\frac{(y-x,n(y))}{r^3}\,dS(y),$$

Для $x\in S$ последний интеграл сингулярный, берется в смысле главного значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя условия теоремы и (4.3), запишем в этом случае динамический аналог формулы Грина (3.6). Вычислим последовательно свертки:

$$4\pi\hat{U}(x,t)*\frac{\partial u}{\partial n}\delta_S(x)H(t)=\int\limits_{S_t(x)}\frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)}dS(y)-$$

$$-mc\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)} f_0(r,\tau)\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}dS(y)=$$

$$\int\limits_{S_t(x)}\frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)}dS(y)-$$

$$-m\int\limits_{S_t^-(x)} f_0(r,r/c)\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}dV(y);$$

$$-4\pi\hat{W}_{,j}*\dot{u}(x,t)n_j(x)\delta_S(x)H(t)=$$

$$=-\int\limits_{S_t(x)}\dot{u}(y,t-r/c)\frac{(y-x,n(y))}{cr^2}\,dS(y)-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)}\frac{(y-x,n(y))}{r^3}\,\dot{u}(y,t-\tau)\,dS(y)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_t(x)}\frac{(y-x,n(y))}{c^2 r}f_2(r,\tau)\,\dot{u}(y,t-\tau)dS(y).$$

При $r=\|y-x\|\neq 0$ можно менять порядок интегрирования, поэтому:

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)}\frac{(y-x,n(y))}{r^3}\,\dot{u}(y,t-\tau)\,dS(y)=$$

$$=-\int\limits_{S_t(x)} u(y,t-r/c)\frac{(y-x,n(y))}{r^3}\,dS(y)$$

Суммируя, получим формулу теоремы.

Заметим, что для точек $x\in S$ при $t>0$ все ядра не имеют особенностей, и интегралы справа существуют и определяют регулярные на данном множестве функции. Поскольку слева и справа стоят регулярные функции и они равны на этом множестве как обобщенные, в силу леммы Дюбуа-Реймона, они равны в обычном смысле, как числовые функции.

Пусть $x^*\in S$. Запишем динамический аналог формулы Грина для области с выколотой ε – окрестностью точки $x^*\in S,\varepsilon<ct$:

$$0=-\int\limits_{S_t(x)-O_\varepsilon(x)}\frac{1}{r}\frac{\partial u\left(y,t-\frac{r}{c}\right)}{\partial n(y)}dS(y)-$$

$$-\int\limits_{S_t(x)-O_\varepsilon(x)}\dot{u}\left(y,t-\frac{r}{c}\right)\frac{(y-x,n(y))}{cr^2}dS(y)+$$

$$+mc\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)-O_\varepsilon(x)} f_0(r,\tau)\frac{(y-x,n(y))}{r}\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}dS(y)+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{S_\tau(x)-O_\varepsilon(x)} f_2(r,\tau)\dot{u}(y,t-\tau)dS(y)-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x,t)}\frac{1}{r}\frac{\partial u(y,t-r/c)}{\partial n(y)}\,dS(y)-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x,t)}\dot{u}(y,t-r/c)\frac{(y-x,n(y))}{cr^2}dS(y)+$$

$$+mc\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x,\tau)} f_0(r,\tau)\frac{(y-x,n(y))}{r}\frac{\partial u(y,t-\tau)}{\partial n(y)}dS(y)-$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x,\tau)} f_2(r,\tau)\,\dot{u}(y,t-\tau)\,dS(y)+$$

$$+\int\limits_{S_t(x)-O_\varepsilon(x)} u(y,t-r/c)\frac{(y-x,n(y))}{r^3}dS(y)+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^-(x,t)} u(y,t-r/c)\frac{(y-x,n(y))}{r^3}dS(y). \qquad (7.5)$$

Теперь перейдем к пределу по $\varepsilon\to 0$. В первом интеграле подынтегральная функция имеет слабую интегрируемую особенность при r=0 . Во втором интеграле - не имеет особенность при r=0. В силу этого интегралы по Γ_ε^- от этих функций в третьем и четвертом слагаемом стремятся к нулю. Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_t(x)-O_\varepsilon(x)} u\left(y,t-r/c\right)\frac{(y-x,n(y))}{2r^3}dS(y)=$$

$$=V.P.\int_{S_t(x)} u\left(y,t-r/c\right)\frac{(y-x^*,n(y))}{2r^3}dS(y)$$

Причем главное значение интеграла существует, т.к. подынтегральная функция имеет на двухмерной поверхности S особенность порядка $1/r^2$, функция u - непрерывна на S, а характеристика $(y-x^*,n(x^*))$ антисимметрична в противоположных относительно x^* точках (см. [4]).

Рассмотрим последний предел. На $\Gamma_\varepsilon^-(x)$ имеем: $\|y-x\|=\varepsilon$, $n(y)=\left(x-y\right)/\varepsilon$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*,t)} u\left(y,t-r/c\right)\frac{(y-x^*,n(y))}{r^3}dS(y)\right\}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*,t)}\left(u\left(y,t-r/c\right)-u(x^*,t)\right)\frac{(-n(y),n(y))}{\varepsilon^2}dS(y)\right\}-$$

$$-u(x^*,t)\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_\varepsilon^-(x^*,t)}\frac{dS(y)}{\varepsilon^2}\right\}=-2\pi u\left(x^*,t\right)$$

Переходя в (7.5) к пределу по $\varepsilon\to 0$ и перенося последнее слагаемое в правую часть, получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Формула на границе ($x\in S$) дает сингулярное граничное интегральное уравнение для решения второй начально-краевой задачи. Заметим, что в формулу теоремы помимо граничных значений функции и ее нормальной производной, входят граничные значения скорости изменения этой функции, причем все с запаздыванием по времени. Это отличает динамический аналог формулы Грина от аналогичной формулы для эллиптических уравнений. Кроме того область интегрирования подынтегральных функций зависит от времени. Это существенно отличает граничные интегральные уравнения нестационарных задач от ГИУ для эллиптических задач. Это новый класс ГИУ в запаздывающих потенциалах требует специального исследования методами фукционального анализа.

Для первой краевой задачи неизвестная производная по нормали входит под знак поверхностного интеграла со слабо полярным ядром. Остальные слагаемые известны.

Заключение. В статье разработан метод сингулярных граничных интегральных уравнений для решения нестационарных краевых задач для уравнения Клейна-Гордона-Фока с краевыми условиями Дирихле или Неймана на основе метода обобщенных функций [5].

Для решения полученных сингулярных ГИУ, разрешающих поставленные краевые задачи, можно использовать численный метод граничных элементов, который в настоящее время широко используется для решения ГИУ краевых задач эллиптического и параболического типов.

Литература: [1.] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.1981. 512 с.; **[2.]** *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0093-9.; **[3.]** *Справочник по специальным функциям*. Под редакц. М. Абрамовица, И. Стигана. М: Наука, 1979. .; **[4.]** *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.; **[5.]** *Алексеева Л.А.* Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал. Т.6, №1(19), 2006, с.16-32.

Принято в печать 11.12.12

КЛЕЙН-ГОРДОН-ФОК ТЕҢДЕУІ ҮШІН СТАЦИОНАРЛЫҚ ЕМЕС ШЕКТІК
ЕСЕПТЕРДІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ШЕШІМДЕРІ

Алексеева Л.А., Баегизова А.С.
ҚР БҒМ математика институты, alexeeva@math.kz
Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, baegiz_a@mail.ru

Мақалада анықталу облысының шекарасында Дирихле немесе Нейман шарттарымен берілген Клейн-Гордон-Фок теңдеуі үшін стационарлық емес шектік есептер қарастырылған және екпінді толқындарды ескере отырып қойылған шектік есептердің жалғыздығы дәлелденген. Жалпыланған функциялардың тәсілдері негізінде шектік интегралдық теңдеулерді шешу әдісі жасалған. Жалпыланған функциялар кеңістігінде Грин формуласының динамикалық аналогі алынған, жазық және үш өлшемді жағдайлар үшін регулярлы интегралдық көріністер тұрғызылған. Қойылған бастапқы-шектік есептер үшін шешілетін сингулярлы шектік интегралдық теңдеулер алынды.

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА-ГОРДОНА-ФОКА

Алексеева Л.А., Баегизова А.С.
Институт математики МОН РК, alexeeva@math.kz
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, baegiz_a@mail.ru

В статье рассмотрены нестационарные краевые задачи для уравнения Клейна-Гордона-Фока с условиями Дирихле или Неймана на границе области определения, доказана единственность поставленных краевых задач с учетом ударных волн. На основе метода обобщенных функций разработан метод граничных интегральных уравнений для решения поставленных задач. Получены динамические аналоги формул Грина для их решений в пространстве обобщенных функций и построены регулярные интегральные представления в плоском и трехмерном случаях. Получены разрешающие сингулярные граничные интегральные уравнения для решения поставленных начально- краевых задач.

GENERALIZED SOLUTIONS OF NONSTATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEMS
FOR THE KLEIN-GORDON-FOCK EQUATION

Alexeyeva L.A., Bayegizova A.S.
Institute of Mathematics MES RK, alexeeva@math.kz
ENU in honor of Gumilev L.N, baegiz_a@mail.ru

The article deals with non-stationary boundary value problem for the Klein-Gordon-Fock equation under Dirichlet or Neumann conditions at the boundary of definition domain. On the basis of the method of generalized functions the method of boundary integral equations for solving them is designed. The dynamic analogues of Green formulas in the space of generalized functions are obtained, and its regular integral representations in the plane and three-dimensional cases are built. The singular boundary integral equations for solving the non-stationary boundary value problems have been constructed.