

## ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭКСИТОННЫХ ОБРАЗОВАНИЙ В НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ

З.Ж. Жанабаев, Т.Ю. Гревцева, Г.С. Асанов

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы

*Предлагается фрактальная модель энергетического спектра экситонов в наноструктурированных полупроводниках с хаотической структурой. В этом случае известная аналогия экситона с водородоподобным атомом становится неполной.*

*Получены уравнения для энергии экситона, биекситона и триона в зависимости от энергии возбуждающего фотона. Приведено сопоставление теории с экспериментами последних лет. Теория указывает наличие наиболее универсальных закономерностей, присущих иерархическим системам.*

### Введение

Экситоны и их образования (биекситоны, трионы) позволяют различать быстропеременную информацию, поэтому являются объектами многочисленных исследований по нанoeлектронике. В наноразмерных полупроводниках реализуются более благоприятные условия для перекрытия волновых функций электрона и дырки, в силу этого энергия связи экситона будет значительно больше, чем в неограниченно однородной среде. Этот факт дает надежду на то, что квантовые биты от экситонов можно будет получать при достаточно высоких, даже комнатных температурах.

Как правило, из-за специфики технологических процессов (имплантация, диффузионная агрегация) наноразмерные полупроводники имеют нерегулярную, хаотическую структуру. При этом у них наблюдаются, хотя и на малом интервале масштаба измерения, фрактальные закономерности [1]. Следовательно, свойства экситонов не могут быть универсальным образом описаны плавными закономерностями, вытекающими, например, из дифференциальных уравнений. Поэтому известная аналогия экситонов с водородоподобными атомами не может полностью описать специфику энергетического спектра экситонов в некристаллических полупроводниках с хаотической структурой.

К такому выводу также приводят экспериментальные работы [2-5], в которых описывается наличие некоторого самоподобия,

квантовомеханической когерентности экситонов и биекситонов и условия ее разрушения. Из сказанного следует естественный вопрос: обладает ли энергетический спектр экситонов свойствами фрактальных кривых?

Целью настоящей работы является построение нелинейной модели фрактальной эволюции экситонов в зависимости от энергии возбуждающих их фотонов и сопоставление результатов с экспериментами.

### Нелинейные фрактальные меры

Основными свойствами фракталов являются их самоподобие и зависимость их меры от масштаба измерения. Под мерой понимается любая физическая величина, характеризующаяся аддитивным измеримым множеством. К примеру, мерой геометрического фрактала служит длина, площадь, объем. Удивительное разнообразие физических свойств нанобъектов обусловлено именно нелинейной зависимостью их меры от собственной ее величины. Этот факт убедительно показывает необходимость фрактального анализа в нанонауке.

Известные теории фракталов предполагают независимый выбор минимального масштаба измерения (размера ячеек, покрывающих объект) от величины определяемой меры. Если нас интересует эволюция меры от заданного параметра порядка – определяющей переменной физического процесса, то масштаб измерения должен быть выбран через этот параметр и искомую меру. Следова-

тельно, фрактальная мера будет нелинейной функцией, зависящей от самого процесса.

Запишем традиционное определение фрактальной меры  $M$  в виде

$$M = M_0 \left( \frac{|\Delta M|}{M_*} \right)^{-\gamma}, \quad \gamma = D - d, \quad \gamma > 0, \quad (1)$$

где  $M_0$  – регулярная (нефрактальная) мера,

$\Delta M$  – масштаб измерения,

$M_*$  – норма

$M$ ,  $D$  – фрактальная размерность множества значений  $M$ ,  $d$  – топологическая размерность носителя меры. Учитывая то, что  $\Delta M$  не зависит от  $M$ , меру, определяемую формулой (1), можно условно назвать линейной.

При наличии параметра порядка  $\lambda$  можно выбрать  $\Delta M$  в следующих формах:

$$\Delta M_M = \frac{|M - \lambda|}{M} = \left| 1 - \frac{\lambda}{M} \right|, \quad \Delta M_\lambda = \frac{|M - \lambda|}{\lambda} = \left| 1 - \frac{M}{\lambda} \right|, \quad (2)$$

где индексы  $M$ ,  $\lambda$  соответствуют нормам  $\Delta M$ . С учетом (2) формула (1) запишется в виде

$$M_M = M_0 \left( \left| 1 - \frac{\lambda}{M} \right| \right)^{-\gamma}, \quad M_\lambda = M_0 \left( \left| 1 - \frac{M}{\lambda} \right| \right)^{-\gamma}. \quad (3)$$

В пределе  $\gamma \rightarrow 0$  имеем  $M_M = M_\lambda = M_0$ , что соответствует смыслу  $M_0$ . При  $\lambda = 0$  имеем  $M_M = M_0$ ,  $M_\lambda = 0$ . Это означает, что фрактальная мера, определяемая собственной нормой, существует и в случаях отсутствия внешнего воздействия, характеризуемого параметром  $\lambda$ .

Значения  $\gamma$  известны для самоподобного (коэффициенты подобия одинаковы по всем переменным) и самоаффинного (коэффициенты подобия различны) множеств. Нормированные информационные энтропии самоподобных и самоаффинных множеств равны, соответственно,  $I_2 = 0.806$ ,  $I_1 = 0.567$  [1]. Фрактальная размерность секущей поверхности хаотического объекта,

вложенного в пространство с топологической размерностью  $\tilde{d}$ , равна

$$D = \tilde{d} - I, \quad I = (I_1, I_2). \quad (4)$$

С учетом этого имеем

$$\gamma = \tilde{d} - d - I, \quad 1 - I \leq \gamma \leq \tilde{d} - I, \quad \tilde{d} = 2, 3. \quad (5)$$

Применим формулы (3) к описанию энергетического спектра экситонов. Пусть в зоне проводимости полупроводника с шириной запрещенной зоны  $E_g$  имеется один электрон с эффективной массой  $m_e$ , а в валентной зоне – одна дырка с эффективной массой  $m_h$ . Роль остальных частиц сведем к фону с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Считая, что взаимодействие между этими квазичастицами происходит по закону Кулона, из уравнения Шредингера задачи об атоме водорода можно получить следующее выражение для полной энергии электронно-дырочной пары:

$$E_n(\vec{k}) = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2(m_e + m_h)} - \frac{m_e m_h e^4}{2\epsilon^2 \hbar^2 n^2 (m_e + m_h)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

В дальнейшем мы не будем учитывать энергию движения экситона «как целого», считая равным нулю квазиимпульс  $\vec{k}$ . Обозначим энергию связи электрона и дырки в экситоне (последний член в формуле (6)) через  $E$ . Рассмотрим случай возбуждения электрона в зону проводимости фотоном с энергией  $\hbar\omega$ , тогда формулу (6) можно записать в виде

$$\hbar\omega - E_g = E. \quad (7)$$

Принимая упрощенные обозначения  $M_M = M = E_1$ ,  $M_0 = E_0$ ,  $\lambda = \hbar\omega - E_g$ ,  $M_\lambda = E_{1,\omega}$ , из формул (3) получим для энергии одиночного экситона  $E_1$  выражение

$$E_1 = E_0 \left( 1 - \frac{\hbar\omega - E_g}{E_1} \right)^{-\gamma} \equiv f(E_0, E_1), \quad (8)$$

$$E_{1,w} = E_{0,w} \left( 1 - \frac{E_{1,w}}{\hbar\omega - E_g} \right)^{-\gamma} \equiv f(E_{0,w}, E_{1,w}).$$

Здесь  $E_0$  – энергия экситона на пороге возбуждения его фотоном при  $\hbar\omega = E_g$ , при этом  $E_{0,w} = 0$ .

Биэкситоны, трионы и другие кластеры определим через иерархические структуры:

$$E_n = f \left( \dots f \left( \frac{E_0}{n}, E_n \right) \dots \right), \quad (9a)$$

$$E_{n,w} = f \left( \dots f \left( \frac{E_{0,w}}{n}, E_{n,w} \right) \dots \right), n = 1, 2, \dots, \quad (9b)$$

где число скобок равно  $n$ .

Уравнения (9a) соответствуют выбору масштаба измерения фрактальной меры относительно самой меры и описывают эволюцию экситонов, биэкситонов и других структур, существующих и в основном состоянии (без внешнего излучения). Уравнения (9b) записаны относительно энергии фотонов и применимы к описанию только возбужденного состояния. Формулы (8), (9a), (9b) позволяют определить энергию системы, состоящей из экситонных образований в виде

$$E = \sum_{i=1}^n E_i, n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

где  $n = 1$  описывает экситон,  $n = 2$  – биэкситон,  $n = 3$  – трион и т.д.

Если, как в простейшем случае собственной проводимости и при отсутствии безызлучательных переходов интенсивность фотолюминесценции и коэффициент поглощения фотонов  $\alpha(w)$  определяются плотностью числа состояний, то имеем

$$\alpha(w) = \alpha(E_g/\hbar) E(w)^{\frac{1+\gamma}{2}}. \quad (11)$$

В формулу (11)  $\gamma$  входит из-за учета фрактальности пространства импульсов, в котором определяется плотность состояний. После

этого мы можем учитывать влияние внешнего поля  $P$  на относительную интенсивность фотолюминесценции биэкситона  $\alpha_2(P)$  и экситона  $\alpha_1(P)$ :

$$\alpha_2(x, w) = \alpha_2(w) \left( \frac{\langle \alpha_1(w)^2 \rangle}{\langle \alpha_2(w)^2 \rangle} \right)^{\frac{1}{2}} th(x)^{\frac{1+\gamma}{2}}, \quad x = \frac{P}{P_0}, \quad (12)$$

где  $P_0$  – относительная минимальная интенсивность, при которой достигается насыщение  $\alpha_2(x, w)$ , функция  $th(x)$  учитывает известное выражение для изменения числа когерентных осцилляторов, угловые скобки означают усреднение по частоте.

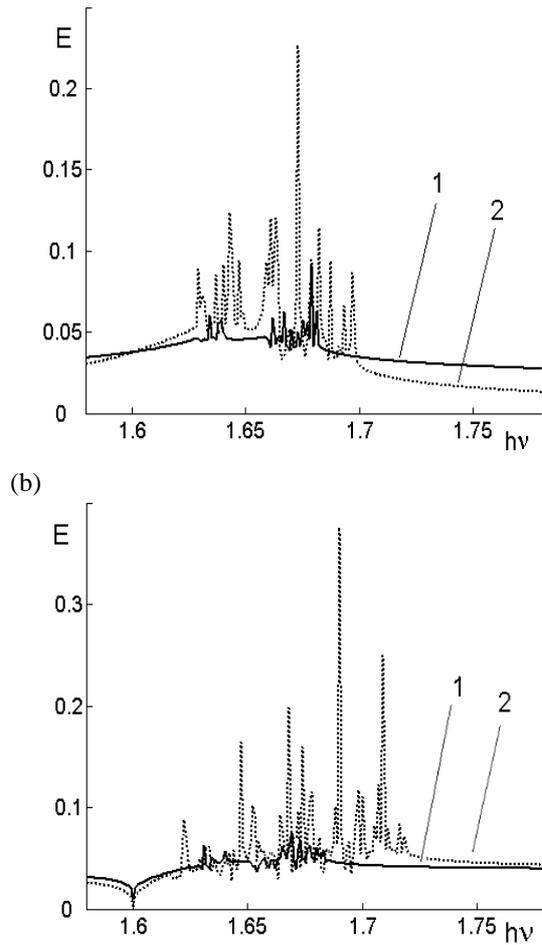
### Результаты численного анализа

На основе формул (8)-(10) мы исследовали экситонно-биэкситонные спектры в наноструктурированных полупроводниковых пленках. Варьируя значения параметров  $E_g$ ,  $E_0$ ,  $\gamma$ , возможно получать различные типы экситонных спектров.

Более высоким значениям фрактальных размерностей спектральной кривой соответствует рост амплитуды осцилляций и расширение спектра (рис. 1). Были использованы самоподобное  $(1 - I_2)$  и самоаффинное  $(1 - I_1)$  значения фрактальных размерностей. Ширина запрещенной зоны определяет расположение области осцилляций, т.е. интервал энергий экситонов и биэкситонов. Нижняя граница области осцилляций больше ширины запрещенной зоны на величину порядка  $E_0$ . Увеличение ширины запрещенной зоны приводит к смещению области осцилляций в сторону высоких частот и росту их амплитуды

Мы изучили также влияние параметров  $\gamma$ ,  $E_g$ ,  $E_0$  на когерентность спектров экситонов и биэкситонов. На рисунке 2 показано влияние  $\gamma$  на характер осцилляций экситонных и биэкситонных спектров в полупроводниках с различной шириной запрещенной зоны. На рисунке через X обозначены экситонные спектры, а через XX – биэкситонные. Эти спектры для удобства анализа разнесены че-

рез замену  $E_0/2$  на  $E_0$  в формуле (9a). Кривые построены по точкам, расположенным на (a)



больших энергий фотонов и росту их амплитуды. (a)

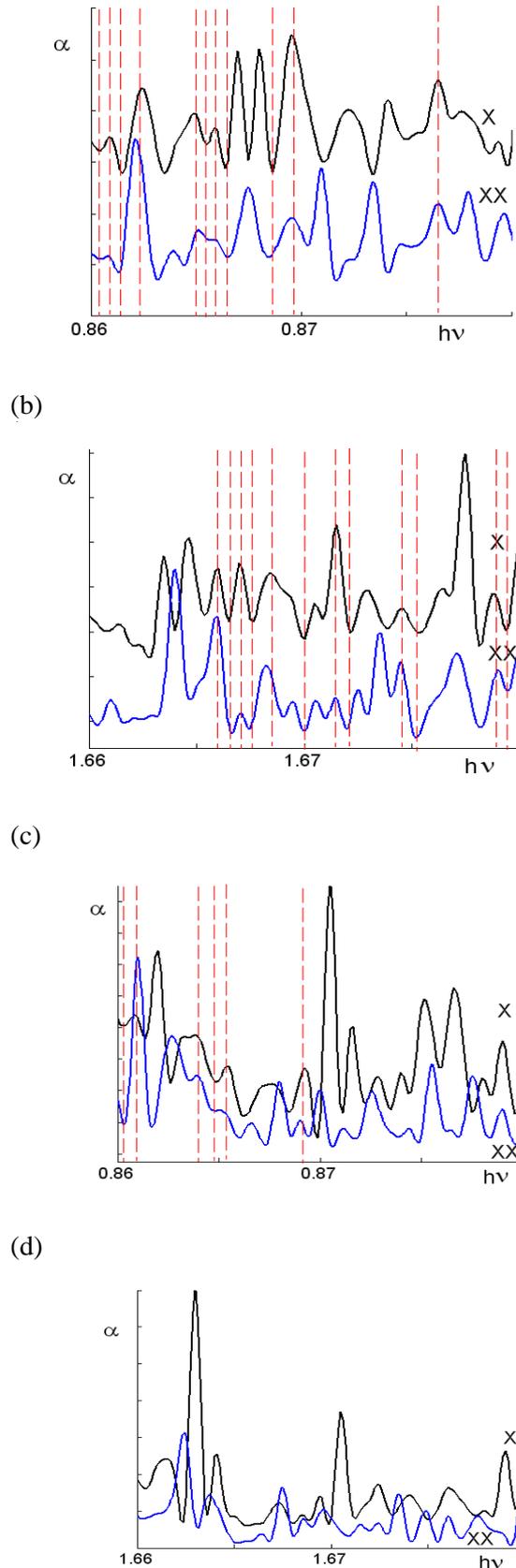


Рис. 1. Влияние параметра  $\gamma$  на экситонно-бизекситонный спектр.

(a) – формула (9a), (b) – формула (9b):

$$E_g = 1.6 \text{ eV}, E_0 = 0.05 \text{ eV},$$

$$1 - \gamma = 1 - I_2, 2 - \gamma = 1 - I_1.$$

расстоянии  $\Delta \hbar \omega = 5 \cdot 10^4$  эВ друг от друга. Как и следовало ожидать, когерентность между экситонными и бизекситонными спектрами заметна при самоподобной структуре пленок, при  $\gamma = 1 - I_2$  (рисунок 2(a, b)). С ростом значения  $\gamma$  когерентность нарушается, особенно это заметно для полупроводников с достаточно большой шириной запрещенной зоны (рисунок 2(d)). Когерентность становится заметнее для полупроводников с меньшей шириной запрещенной зоны и при меньших значениях энергиях возбуждающих фотонов.

Увеличение  $E_0$  также приводит к расширению области осцилляций в сторону

Рис. 2. Влияние фрактальной размерности на

когерентность экситонных и биэкситонных спектров при различных значениях ширины запрещенной зоны.

- $E_0 = 0.05$ ; (a) -  $\gamma = 1 - I_2$ ,  $E_g = 0.8$  эВ,
- (b) -  $\gamma = 1 - I_2$ ,  $E_g = 1.6$  эВ,
- (c) -  $\gamma = 1 - I_1$ ,  $E_g = 0.8$  эВ,
- (d) -  $\gamma = 1 - I_1$ ,  $E_g = 1.6$  эВ.

**Сопоставление с экспериментом**

На рисунке 3(a) показан экспериментальный экситонный спектр фотолюминесценции пары квантовых точек InGaAs, полученных на подложке GaAs методом металлоорганической вакуумной фазовой эпитаксии [4]. Образец имеет два слоя квантовых точек, расстояние между слоями составляет 5 нм. Результаты моделирования по формулам 9(a), (10), (11) представлены на рисунке 3(b).

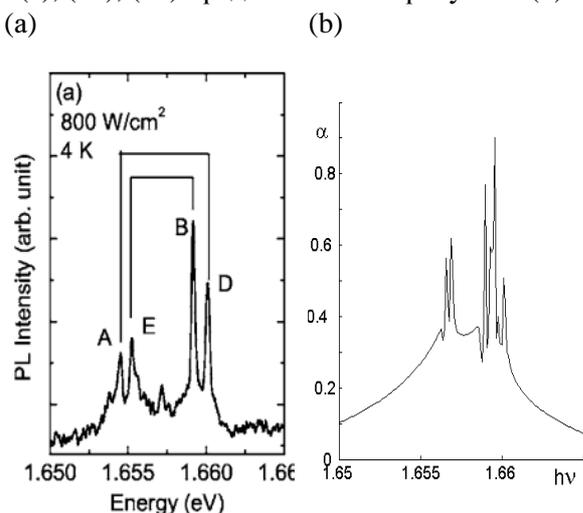


Рис.3. Спектр фотолюминесценции квантовых точек двухслойной структуры квантовых точек InGaAs

- (a) – эксперимент [4], (b) – теория:
- $E_g = 1.65$  eV,  $\gamma = 1 - I_2$ ,  $E_0 = 4 \cdot 10^{-3}$  eV.

Экситонно-биэкситонный спектр, показанный на рисунке 4(a), получен при 4 К [5]. Квантовые точки, исследуемые в эксперименте, были созданы в матрице GaAs (311) методом металлоорганической вакуумной эпитаксии. Квантовые точки образовались в результате самоорганизации. Каждый пик фотолюминесценции соответствует возбужденному энергетическому состоянию экситона или

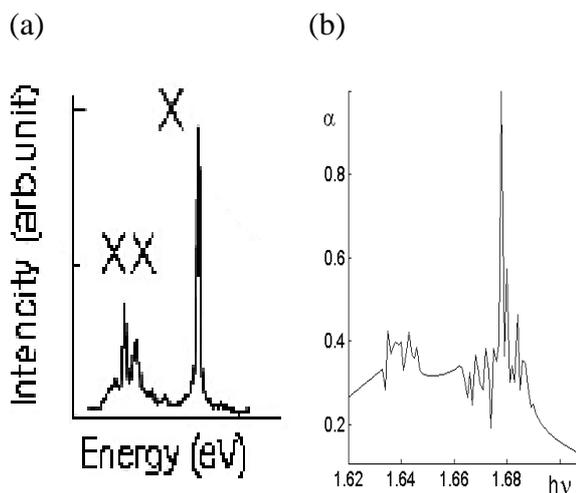
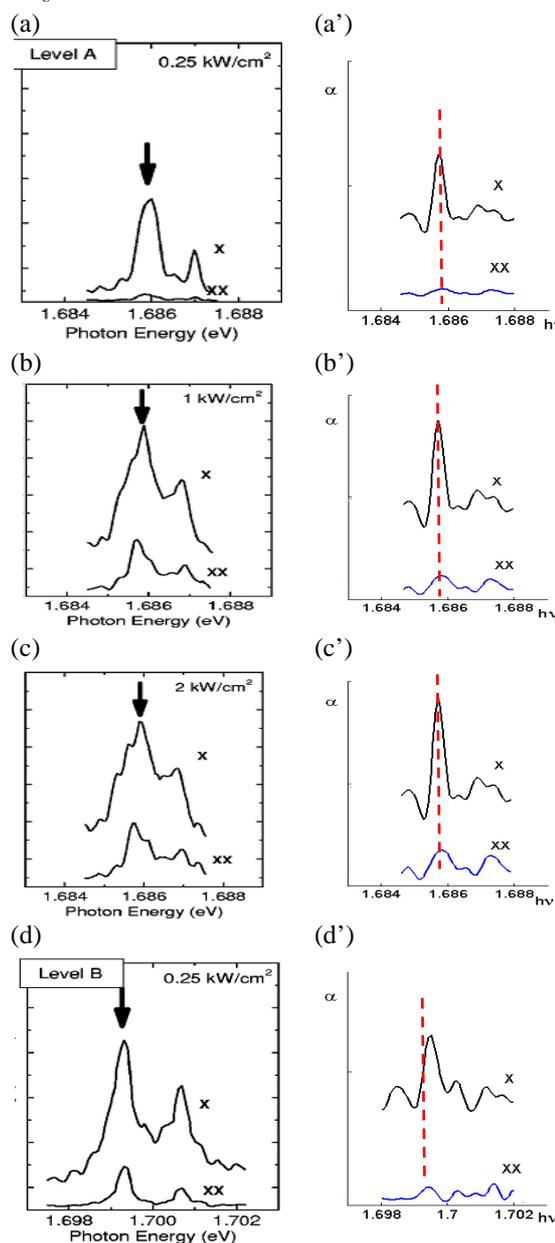


Рис.4. Экситонно-биэкситонный спектр фотолюминесценции изолированной квантовой точки InGaAs

- (a) – эксперимент [5], (b) – теория:
- $E_g = 1.60$  eV,  $\gamma = 0.244$ ,  $E_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  eV.



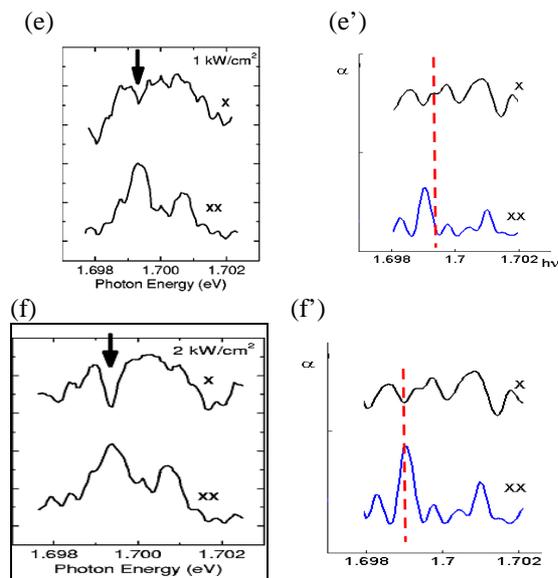


Рисунок 5. Влияние внешнего излучения на спектры фотолюминесценции квантовых точек InGaAs.

$$E_g = 1.60 \text{ эВ}, \gamma = 1 - I_2, E_0 = 0.05 \text{ эВ}.$$

биэкситона. На рисунке 4(b) представлен экситонно-биэкситонный спектр, полученный по формулам 9(a), (10), (11). Шаг по оси абсцисс для графиков 3(b) и 4(b) равен  $\Delta\hbar\omega = 10^{-4}$  эВ.

Теоретические кривые построены для значений  $E_0$ , близких к экспериментальным значениям энергии связи экситонов и биэкситонов [5]. Пороговое значение энергии образования экситонов  $E_0$  зависит, как и ожидалось, от характера локализации наноструктур, от температуры. По смыслу  $E_0$  может служить верхней оценкой энергии фононов, т.к. при бóльшей энергии фононов экситон распадается.

На рисунках 5(a-f) приведены экспериментальные спектры фотолюминесценции квантовой точки InGaAs, облученной лазером с тремя разными мощностями [5]. Наши теоретические результаты представлены на рисунках 5(a'-f'). На рисунках 5 (a-c) показаны экситонный и биэкситонный спектры при относительно низких энергиях фотонов. На этом интервале энергий фотонов наблюдается когерентность между экситонными и биэкситонными спектрами, чему также соответствуют результаты численного анализа с учетом формулы (12) и показанные на рисунках

5(a'-c'). Как из эксперимента, так и из нашей теории следует, что нарушение когерентности в коротковолновой области спектра становится существенным с ростом энергии облучения.

### Обсуждение

Так же, как и в эксперименте, в теоретических графиках наблюдается смещение экситонных и биэкситонных спектров в сторону больших значений частоты фотонов с ростом  $E_0, E_g$ . Полученные в теории экситонные пики энергии возникают на тех же интервалах изменения  $\hbar\omega$ , что и в экспериментах, т.е. на интервалах порядка  $10^{-3}$  эВ. Параметры  $E_0, E_g, \gamma$  адекватно учитывают условия эксперимента. Соотношение амплитуд экситона и их образований соответствует эксперименту.

Заслуживает внимания тот факт, что в эксперименте [5] биэкситон образуется вокруг квантовой точки, область локализации специально не ограничена. В эксперименте [4] биэкситон образуется между квантовыми точками, расстояние между которыми порядка 5 нм, т.е. узкая локализация способствует образованию экситона при малых  $E_0$ . Это тоже соответствует теории.

Теория может быть применена для описания влияния внешнего электрического поля на структуру экситонных образований. Амплитуда биэкситона сильнее зависит от внешнего поля по сравнению с амплитудой экситона. Из результатов нашей теории также следует, что при линейной поляризации внешнего излучения может преимущественно наблюдаться декогерентность экситонов и биэкситонов по сравнению со случаем круговой поляризации.

Таким образом, фрактальная модель зависимости энергии электрон-дырочной пары от энергии возбуждающего фотона может быть использована для описания когерентности экситонных образований. Нужно указать различие между терминами «квантовомеха-

ническая когерентность» и когерентность волновых процессов различной природы. Квантовомеханическая когерентность означает только наличие интерференции между волновыми функциями по времени, что обнаруживается в виде осцилляций энергии системы. Когерентность в общем смысле означает постоянство разности фаз эволюции подсистем по некоторым определяющим переменным. В экситонных образованиях когерентность может наблюдаться в этих двух видах.

Как видно из сопоставления с экспериментом, теория правильно описывает все

основные закономерности экситонных и би-экситонных спектров.

### **Заключение**

В настоящей работе мы впервые предлагаем формулу нелинейной фрактальной меры, которая зависит от самой себя как масштаб измерения. Такая мера правильно отражает иерархическую суть экситонных образований. Теория описывает условия когерентности, декогерентности энергетических пиков экситонных образований. Новые идеи нашей работы могут найти широко применение в современной наноэлектронике.

**Литература:** [1] Zhanabayev Z.Zh., Grevtseva T.Yu. // *Physica B: Condensed Matter*. – 2007. – Vol. 391, No. 1. – P. 12-17.; [2] Kamada H., Gotoh H., Temmyo J., Takagahara T., Ando H. // *Physical Review*. – Vol. 87, No 24. – 2001. – PP. 246401-1 – 4; [3] Gotoh H., Kamada H. // *NTT Technical Review*. – Vol. 3, No. 12. – 2005. – P. 19-26; [4] Gotoh H., Sanada H., Kamada H., Nakano H., Hughes S., Ando H., Temmyo J. // *Physical Review B* 71. – 2006. – PP. 115322-1 – 6; [5] Gotoh H., Kamada H., Saitoh T., Ando H., Temmyo J. // *Physical Review B* 71. – 2005. – PP. 195334-1 – 9.

*Принято в печать 15.12.11*

### **УДК 530.1**

#### **ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЭКСИТОННЫХ ОБРАЗОВАНИЙ В НАНОСТРУКТУРИРОВАННЫХ ПОЛУПРОВОДНИКАХ**

**Зейнула Жанабаевич Жанабаев, Татьяна Юрьевна Гревцева, Гани Сатбекович Асанов**  
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы  
Алматы 050038, Казахстан, аль-Фараби, 71; E-mail: [mptl@list.ru](mailto:mptl@list.ru)

**Ключевые слова:** полупроводник, квантовая точка, экситон, фотолюминесценция, когерентность, фрактал.

#### **НАНОҚҰРЫЛЫМДЫ ШАЛАӨТКІЗГІШТЕРДЕГІ ЭКСИТОН ҚҰРЫЛЫМДАРЫНЫҢ ФРАКТАЛДЫҚ ҚАСИЕТТЕРІ**

**Жанабаев Зейнолла Жанабайұлы, Татьяна Юрьевна Гревцева, Гани Сатбекович Асанов**  
Алматы қ., әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті  
Алматы 050038, Қазақстан, әл-Фараби, 71; E-mail: [mptl@list.ru](mailto:mptl@list.ru)

Хаосты құрылымға ие нанокұрылымды шалаөткізгіштердегі экситондардың энергетикалық спектрінің фракталдық моделі ұсынылған. Бұл жағдайда белгілі экситонның сутегітекес атоммен ұқсастығы толық болмайды.

Экситон, биэкситон және трион энергияларының фотонның коздыру энергиясына тәуелділік теңдеулері алынған. Теориялық нәтижелер соңғы эксперименталдық нәтижелермен салыстырылған. Теория иерархиялық жүйелерге сай универсалды заңдылықтардың бар екендігін көрсеткен.

**Кілт сөздері:** шалаөткізгіш, кванттік нүкте, экситон, фотолюминесценция, когеренттілік, фрактал.

#### **FRactal PROPERTIES OF EXCITONIC FORMATIONS IN NANOSTRUCTURED SEMICONDUCTORS**

**Zeinulla Zhanabayevich Zhanabaev, Tatyana Yurievna Grevtseva, Gani Satbekovich Assanov**  
Al-Farabi Kazakh National University, Almaty  
Almaty 050038, Kazakhstan, al-Farabi 71; E-mail: [mptl@list.ru](mailto:mptl@list.ru)

We suggest the fractal model for the description of exciton spectra in nanostructured semiconductors with chaotic structure. In this case the well-known analogy of exciton with hydrogen-like atom is insufficient.

We derive equations for energy of exciton, biexciton and trion depending on energy of exciting photon. Comparison of the results of our theory to the recent experimental data is given in the paper. Theory shows the existence of most universal regularities of hierarchical systems.

**Keywords:** semiconductor, quantum dot, exciton, photoluminescence, coherence, fractal.