

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ
ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРИГГЕРНЫХ ПЕРЕХОДОВ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ И В
БИОФИЗИКЕ

А.Г. Багдоев

Институт механики НАН, г. Ереван Армения

Статья посвящена исследованию методом нелинейной волновой динамики и методом скейлинга некоторых экстремальных триггерных процессов в полупроводниках и в биофизике.

Подробно проведены вычисления методом скейлинга разложения на плоские волны уравнения для электрического поля в полупроводнике, полученные и изученные указанным методом в книге Г. Хакена, видеоизменениями выкладок с уточнением некоторых формул, определением стационарных точек процессов перехода из неустойчивого в устойчивое состояние, исследование этих фазовых переходов при наличии неустойчивости Ганна в полупроводниках. Затем в соответствии с методом нелинейной волновой динамики получена формула для вероятности стационарного состояния. Кроме того, дано применение методов нелинейных волн к решениям уравнения для электрического поля, а также учет флуктуаций, и получение нелинейного функционального уравнения для вероятности, а затем эффективное определение вероятности всего процесса после триггерного перехода в окрестности стационарной области, как и само среднее значение процесса. Все полученные результаты распространяются на динамику опционов в экономике и задачи движения транспорта. Кроме того, методом нелинейной волновой динамики определены вероятности стохастических процессов для биосенсоров.

Введение

Вопросы динамики неравновесных переходов в различных физических и биологических системах представляют весьма актуальные задачи для теории и эксперимента, например в инновационных проблемах микрофизики и нанофизики полупроводников [1-3]. Особый интерес представляют весьма перспективные изделия из полупроводниковых пленок, при изучении динамики которых необходим учет стохастичности на микроуровне. Об этом подробно говорится в книге [4], где дается исследование экстремальных переходов в проводниках с помощью известных нелинейных кинетических уравнений. В настоящей работе нами изучены эти вопросы на основе метода [4], дополненного нами при исследовании статистических вопросов, методами нелинейной волновой динамики, где мы в линейное уравнение Фоккера-Планка для диффузионных процессов,

эквивалентное решению соответствующего стохастического уравнения, добавляем нелинейность, что необходимо [4, 12] в области больших триггерных изменений процесса. Основное внимание в данной статье уделено методу разложения решения на гармоники, и сведения системы к уравнению для I гармоники, что принято в теории квазимонохроматических нелинейных волн в сплошных средах [4, 9]. Неравновесные процессы в сплошной среде другим подходом структурированных частиц, кластеров, изучены в [13, 15].

Данная статья посвящена исследованию методом нелинейной волновой динамики и методом скейлинга разложения на плоские волны электрического поля в полупроводнике для модельного уравнения Г. Хакена [1] с получением стационарных точек для уравнения ведущего параметра, т.е. амплитуды первой гармоники, уравнения Фоккера-Планка для вероятности процесса с добавлением нелинейности, его эффективного

решения двумя указанными выше методами, распространение полученных результатов на аналогичные уравнения динамики опционов для нелинеаризованного известного линейного уравнения "Black-Sholes" и на движение транспорта; исследованию некоторых процессов для биосенсоров.

Проводится детальное применение метода Г. Хакена для модельного уравнения для электрического поля в полупроводниках с разложением на плоские волны, получением обыкновенного дифференциального уравнения для ведущего параметра процесса, амплитуды первой гармоники, исследования его на устойчивость в стационарных особых точках процесса, определением вероятности в конечной стационарной точке, представляющей интерес для процесса после триггерного перехода от медленной латентной области, описываемой линейным диффузионным уравнением для вероятности, в точке бифуркации, к сильно изменяющемуся процессу, который описывается нелинейным диффузионным уравнением.

В указанном решении [1] сделаны некоторые уточнения и дополнительные исследования с получением графиков, а затем в окончательную формулу для вероятности сделано нелинейное добавление с получением замкнутого решения. Кроме того, проведено прямое исследование исходного уравнения для электрического поля с добавлением дельта-флуктуаций методом [1] получения функционального уравнения для вероятности Фоккера-Планка с добавленной нами нелинейностью, и получено замкнутое решение в наиболее важной окрестности стационарных значений.

1. Модель статистической динамики неустойчивости Ганна вблизи порога

Рассматривается характерный триггерный переход для полупроводников. Начальная часть настоящей работы следует изложению книги [1] с. 295-296.

Эффект Ганна, или неустойчивость Ганна, имеет место в полупроводниках с двумя зонами проводимости, для которых положения энергетических минимумов не совпадают друг с другом. Пусть нижняя зона проводимости получает электроны от доноров. Когда электроны ускоряются приложенным электрическим полем, их скорость растет и, таким образом с увеличением поля растет ток. С другой стороны, электроны замедляются благодаря рассеянию на колебаниях решетки (или дефектах). В результате поддерживается отличное от нуля среднее значение скорости v . При малых полях увеличивается E , v с ростом E . Однако по достижении достаточно высоких скоростей электроны могут туннелировать в более высокую зону проводимости, где они снова ускоряются. Если эффективная масса в верхней зоне проводимости больше, чем в нижней, ускорение электронов в верхней зоне меньше, чем в нижней зоне. Конечно, в обоих случаях электроны замедляются благодаря столкновениям с колебаниями решетки. Эффективная средняя скорость электронов в верхней зоне проводимости оказывается меньше, чем в нижней зоне. Поскольку по мере роста напряженности поля все большее число электронов попадает в верхнюю зону проводимости, средняя скорость электронов всего образца уменьшается. Поэтому зависимость средней скорости $v(E)$ от напряженности электрического поля получается такой, как показано на фиг.1.

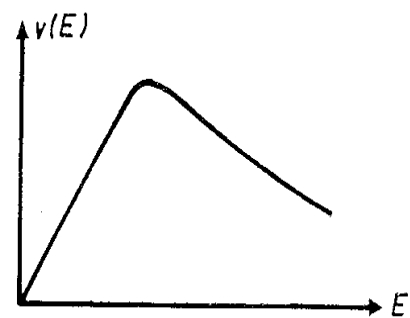


Рис. 1. Средняя скорость электронов как функция напряженности электрического поля

Умножая v на концентрацию электронов n_0 , получаем плотность тока. До сих пор речь шла об элементарном эффекте, который не имеет ничего (или очень мало) общего с кооперативным эффектом. Теперь мы должны принять во внимание то, что электроны сами создают электрическое поле, так что вступает в игру механизм обратной связи. Мы хотим показать, что получающиеся при этом уравнения сильно напоминают уравнения лазера и, в частности, с их помощью можно легко объяснить возникновение импульсов тока.

Рассмотрим основные уравнения. Во-первых, это уравнение, описывающее сохранение числа электронов. Обозначая плотность электронов в точке x в момент времени t через n , а электронный ток, поделенный на заряд электрона e , через J , запишем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Ток J обусловлен двумя вкладками. С одной стороны, имеется потоковое движение электронов $nv(E)$, с другой – на это движение налагается диффузия с коэффициентом диффузии D .

Поэтому запишем “ток” в виде

$$J = nv(E) - D \frac{\partial n}{\partial x} \quad (1.2)$$

источники электрического поля – заряды. Обозначая концентрацию доноров через n_0 записываем в соответствии с электростатикой уравнение для E

$$\frac{\partial E}{\partial x} = e'(n - n_0) \quad (1.3)$$

где введено обозначение $e' = \frac{4\pi e}{\epsilon_0}$

ϵ_0 – статическое значение диэлектрической проницаемости. Исключим величины n и J из вышеприведенных уравнений и получим замкнутое уравнение для E . Для этого выразим в (1.1), n посредством (1.3) и J посредством (1.2), что дает

$$\frac{1}{e'} \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nv(E) - D \frac{\partial n}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.4)$$

исключая снова n (1.4) с помощью (1.3) и преобразуя полученное уравнение, получаем

$$\frac{1}{e'} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E}{\partial t} + e'n_0 v(E) + v(E) \frac{\partial E}{\partial x} - D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.5)$$

Это уравнение можно сразу же проинтегрировать по координате. Постоянная интегрирования, которую мы обозначим через

$$\frac{4\pi}{\epsilon_0} I(t) \quad (1.6)$$

может быть функцией времени. После интегрирования и некоторых преобразований приходим к основному уравнению

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -e'n_0 v(E) - v(E) \frac{\partial E}{\partial x} + D \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{\epsilon_0} I(t) \quad (1.7)$$

Функция $I(t)$, имеющая смысл плотности тока, определяется из условия, что приложенный извне потенциал

$$U = \int_0^L dx E(x, t) \quad (1.8)$$

должен быть постоянным вдоль всего образца. Задача теперь заключается в решении (1.7). Для вычислений требуется знать явный вид функции $v(E)$. Она задается в виде [1]

$$v(E) = \frac{\mu_1 E (1 + BE/E_c)}{1 + (E/E_c)^2} \quad (1.9)$$

μ_1 – подвижность электронов нижней зоны, B – отношение подвижностей в верхней и нижней зонах. Чтобы решить (1.7) разложим E в ряд Фурье

$$E(x, t) = E_0 + \sum_{m \neq 0} E_m(t) e^{imk_0 x} \quad (1.10)$$

Положим

$$E_m = c_m e^{-iamt}, \quad \omega_m = mk_0 v_0, \quad v_0 = v(E_0)$$

Причем m есть целые положительные и отрицательные числа.

Поскольку согласно (1.7) $E = E_0 + E'(x, t)$ и можно разложить по E'

$$v(E) = v(E_0) + \sum_{s=1}^{\infty} v_0^{(s)} E'^{(s)}, \quad (1.11)$$

$$v_0^{(s)} = \frac{d^s v(E_0 + E')}{dE'^s} \Big|_{E'=0}$$

где $E' = \sum_{m \neq 0} E_m(t) e^{imk_0 x}$,

$$k_0 = \frac{2\pi}{L} \text{ по (1.7).}$$

Из (1.11) и (1.7), записанных в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial E'}{\partial t} = & -\dot{e}n_0 v_0 - \dot{e}n_0 \left\{ v_0^{(1)} E' + \frac{1}{2} v_0^{(2)} E'^2 + \frac{1}{6} v_0^{(3)} E'^3 \right\} - \\ & - \left\{ v_0 + v_0^{(1)} E' + \frac{1}{2} v_0^{(2)} E'^2 + \frac{1}{6} v_0^{(3)} E'^3 \right\} \frac{\partial E'}{\partial x} + D \frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} + \frac{4\pi}{\epsilon_0} I, \\ \frac{\partial E'}{\partial x} = & ik_0 \left\{ c_1 e^{ik_0(x-v_0 t)} + 2c_2 e^{2ik_0(x-v_0 t)} - \right. \\ & \left. - c_1^* e^{-ik_0(x-v_0 t)} - 2c_2^* e^{-2ik_0(x-v_0 t)} \right\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где в нулевом приближении $-\dot{e}n_0 v_0 + \frac{4\pi}{\epsilon_0} I = 0$,

можно записать (1.10)-(1.12) с точностью до двух гармоник

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial c_1}{\partial t} - i\omega_1 c_1 \right) e^{ik_0(x-v_0 t)} + \left(\frac{\partial c_2}{\partial t} - i\omega_2 c_2 \right) e^{2ik_0(x-v_0 t)} = \\ = -\dot{e}n_0 v_0^{(1)} E' - \dot{e}n_0 \frac{1}{2} v_0^{(2)} E'^2 - \dot{e}n_0 \frac{1}{6} v_0^{(3)} E'^3 - v_0 \frac{\partial E'}{\partial x} - \\ - \left\{ v_0^{(1)} E' + \frac{1}{2} v_0^{(2)} E'^2 + \frac{1}{6} v_0^{(3)} E'^3 \right\} \frac{\partial E'}{\partial x} - \\ - Dk_0^2 \left\{ c_1 e^{ik_0(x-v_0 t)} + 4c_2 e^{2ik_0(x-v_0 t)} + k.c. \right\} \end{aligned} \quad (1.13)$$

где *k.c.* означает комплексно сопряженное значение, $c_{1,2}^*$ также комплексно сопряжены $c_{1,2}$,

$$\begin{aligned} E' = & c_1 e^{ik_0(x-v_0 t)} + c_2 e^{2ik_0(x-2v_0 t)} + \\ & + c_1^* e^{-ik_0(x-v_0 t)} + c_2^* e^{-2ik_0(x-v_0 t)} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Поскольку нужны уравнения при $e^{ik_0(x-v_0 t)}$ и $e^{2ik_0(x-v_0 t)}$ можно взять в (1.13) приближенные соотношения

$$\begin{aligned} E'^2 = & 2c_2 c_1^* e^{ik_0(x-v_0 t)} + c_1^2 e^{2ik_0(x-v_0 t)} + 2c_1 c_1^* + \\ & + 2c_2 c_2^* + 2c_1 c_2 e^{3ik_0(x-v_0 t)} + 2c_1 c_2^* e^{-ik_0(x-v_0 t)}, \end{aligned}$$

$$E'^3 = c_1^3 e^{3ik_0(x-v_0 t)} + 3c_1^2 c_2 e^{2ik_0(x-v_0 t)}$$

$$\begin{aligned} \left\{ c_2 e^{2ik_0(x-2v_0 t)} + c_1^* e^{-ik_0(x-v_0 t)} + c_2^* e^{-2ik_0(x-v_0 t)} \right\} + \\ + 3c_1^2 e^{2ik_0(x-v_0 t)} \left\{ c_2 e^{ik_0(x-v_0 t)} + c_1^* e^{-ik_0(x-v_0 t)} + c_2^* e^{-2ik_0(x-v_0 t)} \right\}^2 + \\ + \left\{ c_2 e^{2ik_0(x-2v_0 t)} + c_1^* e^{-ik_0(x-v_0 t)} + c_2^* e^{-2ik_0(x-v_0 t)} \right\}^3 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Приравняв слагаемые при указанных гармониках, получим с учетом (1.10), (1.12), (1.14), (1.15), из (1.13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1}{\partial t} = & -\dot{e}n_0 v_0^{(1)} c_1 - \dot{e}n_0 v_0^{(2)} c_2 c_1^* - \dot{e}n_0 v_0^{(3)} \left(\frac{c_1^2 c_1^*}{2} + c_1 c_2 c_2^* \right) - \\ & - Dk_0^2 c_1 - v_0^{(1)} ik_0 c_2 c_1^* - \frac{ik_0}{2} v_0^{(2)} (c_1^2 c_1^* + 2c_2 c_2^* c_1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_2}{\partial t} = & -\dot{e}n_0 v_0^{(1)} c_2 - \dot{e}n_0 \frac{1}{2} v_0^{(2)} c_1^2 - \dot{e}n_0 v_0^{(3)} \left(c_1 c_2 c_1^* + \frac{1}{3} c_2^2 c_2^* \right) - \\ & - v_0^{(1)} ik_0 c_1^2 - \frac{1}{2} v_0^{(2)} ik_0 (2c_1 c_1^* c_2 + 4c_2^2 c_2^*) - 4Dk_0^2 c_2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

где отброшены четвертые степени по произведениям амплитуд, причем свободные

члены в E'^2 сокращаются, а в E'^3 дают

$$3c_1^2 c_2^* + 6c_1 c_2^* c_2^* + 3c_2 c_2^* c_2^* \text{ и в самом уравнении (1.12) в правой части}$$

$$\dot{e}n_0 \frac{1}{2} v_0^{(3)} (c_1^2 c_2^* + 2c_1 c_2^* c_2^* + c_2 c_1^* c_2^*) \text{ и это}$$

постоянное слагаемое третьего порядка может быть включено в условие

$$-\dot{e}n_0 v_0 + \frac{4\pi}{\epsilon_0} I + \dot{e}n_0 \frac{1}{2} v_0^{(3)} (c_1^2 c_2^* + 2c_1 c_2^* c_2^* + c_2 c_1^* c_2^*) = 0$$

Сравнение (1.16) с уравнением (8.181) [2] показывает совпадение коэффициента при c_1 , $\alpha = e'n_0 v_0^{(1)} - Dk_0^2$, отличие в знаках коэффициентов при $c_2 c_1^* v_0^{(2)}$ и $v_0^{(3)} (|c_1|^2 + |c_2|^2)$,

а также и в множителях $1/2$ при некоторых из слагаемых. Сравнение (1.17) с уравнением (8.182) [1] дает аналогичные отличия, что вероятно связано с тем, что в исходном уравнении для E_m (8.173) [1] $A_{s,m}$, даваемое (8.177) [1] дает слагаемое $-e'n_0 v_0^{(s)} c_s^2$, в то время, как в (8.168) [1] это выражение соответствует $\frac{1}{2} e'n_0 E_s^2$. Окончательно из (1.16), (1.17) получится

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = -\beta c_2 + \frac{V}{2} c_1 - V_1 |c_1|^2 c_2 - \frac{V_1}{2} |c_2|^2 c_2 - ik_0 v_0^{(2)} c_2 (|c_1|^2 + 2|c_2|^2) \quad (1.18)$$

$$\alpha = -e'n_0 v_0^{(1)} - Dk_0^2, \quad V = -e'n_0 v_0^{(2)} - v_0^{(1)} ik_0$$

$$V_1 = e'n_0 v_0^{(3)}; \quad -\beta = -e'n_0 v_0^{(1)} - 4Dk_0^2, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0$$

поскольку изучается нисходящая ветвь $v(E)$ рис.1, на которой $v_0^{(1,2)} < 0$.

Согласно теории адиабатического приближения [1 с. 299] в данной задаче ведущим параметром, который в линейном случае теряет устойчивость, является C_1 ,

$$\text{причем } \frac{\partial c_2}{\partial t} \approx 0, \quad |c_1| \gg |c_2|,$$

$$c_2 \approx \frac{V}{2} \frac{c_1^2}{\beta + V_2 |c_1|^2}, \quad V_2 = V_1 + ik_0 v_0^{(2)},$$

и после подстановки C_2 в первое уравнение (1.18) получится

$$\frac{1}{c_1} \frac{\partial c_1}{\partial t} = \alpha + \frac{V^2}{2} \frac{|c_1|^2}{\beta + V_2 |c_1|^2} - \frac{V_1 |c_1|^2}{2} \quad (1.19)$$

(1.19) можно представить так [1 с. 299]

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial c_1^*} \quad (1.20)$$

где ϕ есть потенциал с.299 [2], аналогично Гинзбургу-Ландау. Используя обозначение $I = |c_1|^2$, можно правую часть (1.19)

представить в виде, с учетом $|c_2|^2 \ll |c_1|^2$,

$$\alpha + \frac{V^2}{2} \frac{I}{\beta + IV_2} - \frac{V_1 I}{2} - \frac{V_1 V^2 I^2}{4(\beta + \frac{V_2 I}{2})^2} - \frac{ik_0}{2} v_0^{(2)} I$$

Тогда

$$\phi = \int_0^{c_1^*} \left\{ \alpha + \frac{V^2}{2} \frac{I}{\beta + V_2 I} - \frac{V_1 I}{2} - \frac{V_1 V^2 I^2}{4(\beta + \frac{V_2 I}{2})^2} - \frac{ik_0}{2} v_0^{(2)} I \right\} c_1^* dc_1^*$$

$$, \quad \phi = \phi \quad (1.21)$$

Следуя [1] с.298 можно в реальных случаях пренебречь членами с ik_0 и записать после вычисления интеграла (1.21), где $c_1^* = c_1$,

$$\phi = -\frac{\alpha}{2} I + \frac{V_1}{8} I^2 - \frac{1}{8} \frac{V^2 I^2}{\beta + V_1 I} \quad (1.22)$$

Причем в (1.19) можно считать C_1 действительным числом, тогда

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial c_1}, \quad I = c_1^2$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \left\{ \alpha + \frac{V^2}{2} \frac{c_1^2}{\beta + V_1 c_1^2} - \frac{V_1}{2} c_1^2 - \frac{V_1 V^2}{4} \frac{c_1^4}{(\beta + V_1 c_1^2)^2} \right\} c_1$$

что совпадает, при указанном упрощении, с уравнением (1.19).

В общем случае комплексного C_1 из (1.19)

$$\text{получится} \quad V_1 + ik_0 v_0^{(0)} = V_2,$$

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = \left\{ \alpha + \frac{V^2}{2} \frac{I}{\beta + V_2 I} - \frac{V_1 I}{2} - \frac{V_1 V^2}{4} \frac{I^2}{(\beta + V_2 I)^2} - \frac{ik_0}{2} v_0^{(2)} I \right\} c_1$$

$$I = |c_1|^2 \quad (1.23)$$

2. Исследование решения задачи

Для вышеуказанного упрощения задачи, где $|c_1| = c_1$, $V \approx -e'n_0 v_0^{(2)}$, $V_2 \approx V_1$, после добавления в (1.23) дельта-корреляций, согласно [1] получится, нелинейное уравнение

Фоккера-Планка. Методом [1 с.291], добавив в (1.23) флуктуирующее слагаемое с дельта-корреляцией $Q\delta(t-t')$, и, кроме того, в коэффициент α добавив нели-

нейное слагаемое $\frac{\gamma}{2} f(c_1, t)$, можно за-

писать соответствующее уравнение Фоккера-Планка для вероятности процесса $f(c_1, t)$

$$\frac{df}{dt} = \left\{ \alpha + \frac{\gamma}{2} f(c_1, t) + \frac{V^2 c_1^2}{2\beta + Vc_1^2} - \frac{V_1 c_1^2}{2} - \frac{V_1 V^2 c_1^4}{4(\beta + V_1 c_1^2)^2} \right\} c_1 \frac{df}{dc_1} + \frac{b\partial^2 f}{2\partial c_1^2} \quad (2.1)$$

где γ считается известным постоянным коэффициентом, который согласно методу нелинейной волновой динамики [4] можно определить из наклона средней экспериментальной кривой процесса

$$\bar{x} = \ln \bar{c}_1, \quad \frac{d\bar{x}(t)}{dt} = \alpha + \frac{\gamma}{2} f.$$

В стационарном случае

$$\frac{df}{dc_1} + \frac{2}{b} \frac{d\phi}{dc_1} f - \frac{\gamma}{b} f^2 c_1 = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{d\phi}{dc_1} = \left\{ \alpha + \frac{V^2 c_1^2}{2\beta + Vc_1^2} - \frac{V_1 c_1^2}{2} - \frac{V_1 V^2 c_1^4}{4(\beta + V_1 c_1^2)^2} \right\} c_1$$

ϕ дается (1.22). Интегрирование (2.2) дает

$$f = f_0 e^{-\frac{2}{b}\phi(c_1)} \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{b} f_0 \int_0^{c_1} \xi e^{-\frac{2}{b}\phi(\xi)} d\xi} \quad (2.3)$$

где $f_0 = const$ есть значение вероятности f при $c_1 = 0$. Тогда по (1.22), (2.3) задавая различные, положительные и отрицательные значения, для постоянной γ , можно посчитать вероятность стационарного состояния $f(c_1)$, где c_1 определяется из уравнения

$$\frac{d\phi}{dc_1} = 0. \text{ Теперь, как и в случае лазера [1 с.}$$

279] следует построить кривые $\phi(I)$, даваемые, по крайней мере частным уравнением (1.22). В частном случае $|c_1| = c_1$, (1.22) дает

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial c_1}, \quad \phi = -\frac{\alpha}{2} I + \frac{V_1}{8} I^2 - \frac{1}{8\beta + V_1} V^2 I^2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial c_1} = 2c_1 \frac{\partial \phi}{\partial I}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial I} = -\frac{\alpha}{2} + \frac{V_1 I}{4} - \frac{1}{4\beta + V_1} V^2 I + \frac{1}{8(\beta + V_1 I)^2} V^2 V_1 I^2, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial I} I$$

В [1] с.299, формула (8.190) дается $\phi(I)$:

$$2\phi = \frac{V_1}{4} I^2 - \left(\alpha + \frac{V^2}{4V_1} \right) I - \frac{\beta^2 V^2 / 4V}{\beta + V_1 I} \quad (2.5)$$

причем в [1] множитель 2 при ϕ пропущен. Можно показать, что с точностью до постоянного слагаемого $-\frac{\beta V^2}{8 V_1}$, не влияющего на

$$\frac{\partial \phi(F)}{\partial I}, \quad (2.5) \text{ совпадает с (2.4). Исследование}$$

кубического уравнения $\frac{\partial \phi}{\partial I} = 0$ хоть и громозд-

ко, но можно провести методом [11 с.120, с. 145], впрочем качественные результаты можно получить, предполагая, что амплитуды $I = a^{(1,2)}$ в точках максимума и минимума ϕ невелики и $|V_1|I \ll \beta$ тогда получится приближенное уравнение:

$$-\alpha - \frac{V^2}{2\beta} I + \frac{V_1 I}{2} + \frac{3}{4\beta^2} V^2 V_1 I^2 = 0 \quad (2.6)$$

Это соответствует приближению в формуле (1.9), которую можно записать, вводя

$$E = E_0 + E', \text{ и разлагая по } \frac{E'}{E_0} \text{ до третьей сте-}$$

пени, причем $v_0^{(2)} = v''(E_0) < 0$, $v_0^{(3)} = v'''(E_0) < 0$, тогда $V \approx -e'n_0 v_0^{(2)} > 0$, $V_1 \approx e'n_0 v_0^{(3)} > 0$. Следует отметить, при

$$|V_1|I \ll \beta, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \alpha I - V_1 I^2 + \frac{1}{4} \frac{V^2 I^2}{\beta}$$

т.е. функция $I(t)$ есть логистическая функция [3]. Таким образом, на рисунках 2-8 кроме стационарной точки $I = 0$, будет $I = a^{(1)}$, $a_1 > 0$ и (2.6.) дает

$$a^{(1)} = \frac{\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 + \sqrt{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1\right)^2 + \frac{12\alpha V^2}{\beta^2 V_1}}}{3V^2} \beta^2 \quad (2.7)$$

$$a^{(1)} \approx \frac{2}{3} \frac{\beta V_1}{V^2} \beta^2, \quad \alpha \approx 1 \quad (2.8)$$

Поскольку в (2.7)

$$V_1 > 0, V > 0, a > 0, \beta > 0, \quad a^{(1)} \geq 0.$$

Приближенное уравнение кривой потенциала будет

$$\varphi(I) \approx \frac{\alpha I}{2} + \left(\frac{V_1}{2} - \frac{V^2}{2\beta}\right) \frac{I^2}{4} + \frac{V^2 V_1 I^3}{4\beta^2} - \frac{V^2 V_1^2 I^4}{8\beta^3} \quad (2.9)$$

Исследуем более точное кубическое уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0, \quad \text{Стационарные точки } \frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0, \\ -\alpha + \left(V_1 - \frac{V^2}{\beta}\right) \frac{I}{2} + \frac{V^2 V_1 I^2}{4\beta^2} - \frac{V^2 V_1^2 I^3}{\beta^3} = 0 \quad (2.10)$$

что для небольших I снова дает (2.7), т.е. $I = a^{(1)}$.

При этом кубическое уравнение (2.9) при $\alpha \approx 0$, около критической точки, будет иметь корни $I_0 = 0$ и $I_{1,2}$, удовлетворяющие квадратному уравнению

$$I^2 - \frac{3\beta I}{4V_1} + \frac{\beta_1^3}{2V^2 V_1} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right) = 0, \quad (2.11)$$

причем для малых $\frac{V^2}{\beta} - V_1$, I также мало и

$I = a^{(1)}$ дается (2.8). Определим кривизны

$$\frac{\partial^2 \varphi(I)}{\partial I^2} \quad \text{в точках} \quad \frac{\partial \varphi(I)}{\partial I} = 0. \quad \text{Из (2.5) для}$$

произвольного α следует

$$4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} = V_1 - \frac{\beta^2 V^2}{(\beta + V_1 I)^3} \quad (2.12)$$

Из (2.12) можно выяснить знаки $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2}$, в том

числе в стационарной точке. Следует отметить, что согласно (1.20), (1.22) при исследовании на устойчивость решения,

$$\text{важен знак } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c_1^2} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial I} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} 4I, \quad I = c_1^2,$$

тогда в стационарных точках $c_1 > 0$,

$$\text{поскольку там } \frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c_1^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} 4I \quad \text{и}$$

достаточен знак $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2}$. Вместе с тем в точке

$c_1 = 0$, которая всегда есть корень уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_1} = 0, \quad \text{хотя и } \frac{\partial \varphi}{\partial I} \quad \text{не равно нулю при}$$

$$\alpha > 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial c_1^2} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial I}, \quad \text{причем по (2.4)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = -\frac{\alpha}{2} \quad \text{и точка - есть стационарная}$$

неустойчивая точка. В остальных случаях $\alpha > 0$ из (2.11) можно определить один ко-

рень уравнения $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} = 0$,

$$I_n = \frac{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1\right)^{\frac{1}{3}}}{V_1} \beta \quad (2.13)$$

При малых $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$, $I_n > 0$, мало,

$$I_n \approx \frac{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1\right)^{\frac{1}{3}}}{3V_1} \beta, \quad \text{причем } I_n = \frac{a^{(1)}}{2}$$

из (2.8) в случае $\alpha = 0$, и $I_n < \frac{a^{(1)}}{2}$ из (2.7)

при $\alpha > 0$. Точка перегиба I_n в случае

малых $\frac{\alpha}{V_1} > 0$, $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$ лежит между 0

и $a^{(1)}$. Для конечных $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$, I_n также

конечно, и в этом варианте можно, в принципе, ожидать наличие стационарной

точки $I = a^{(1)}$, решения уравнения (2.10), причем $a^{(1)} > 0$ конечно.

Согласно (2.7) при $\alpha \geq 0$, $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$

Для упрощения вычисления φ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2}$ в стационарных точках примем $\alpha \approx 0$. Тогда при $I = 0$,

$$\varphi = 0, \quad \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} = V_1 - \frac{V^2}{\beta}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} < 0 \quad (2.14) \text{ т.е.}$$

имеется неустойчивость, что верно и для $\alpha > 0$. При $I = a^{(1)}$, удерживая α в первом члене в (2.9), и одновременно, взяв упрощение при $\alpha = 0$ в (2.13) для $I = a^{(1)}$, получим

$$\varphi \approx -\alpha \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right) \frac{\beta^2}{3V^2} - \frac{1}{18} \frac{\left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^3}{V^4} \beta^4 \quad (2.15)$$

$$4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} = \frac{V^2}{\beta} - V_1 - \frac{8}{3V_1} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right)^2 \quad \text{причем,}$$

поскольку в силу (2.7)

$$\alpha \sim \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2, \quad \varphi \sim \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^3$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \sim \frac{1}{4} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right), \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} > 0 \quad (2.16)$$

и имеет место устойчивость.

Исследуем теперь точное кубическое

уравнение $\frac{\partial \varphi(I)}{\partial I} = 0$:

$$-\alpha + \frac{V_1 I}{2} - \frac{1}{2} \frac{V^2 I}{\beta + V_1 I} + \frac{1}{4} \frac{V^2 V_1 I^2}{(\beta + V_1 I)^2} = 0 \quad (2.17)$$

получаемое из (2.4), в раскрытом виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} = 0, \quad I^3 - AI^2 + BI + C = 0 \quad (2.18)$$

$$B = -\frac{3}{2} \frac{\beta}{V_1} + \frac{1}{2} \frac{\beta}{V_1^2} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right) + \frac{2}{V_1} \alpha,$$

$$C = -\frac{\beta^3}{V_1^3} + \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right) + \frac{4\alpha\beta}{V_1^2} \alpha,$$

$$C = -\frac{\alpha}{V_1^3} 2\beta^2. \quad \text{Задавая численные}$$

значения α , $\frac{\beta}{V_1}$, $\frac{V^2}{\beta V_1}$ можно опреде-

лить действительные положительные корни уравнения (2.18).

Решение этого уравнения зависит от знака его дискриминанта.

$$D = q^2 + p^3, \quad q = -\frac{1}{27} A^3 + \frac{1}{6} AB + \frac{C}{2}, \quad (2.19)$$

$$p = \frac{1}{3} B - \frac{1}{9} A^2$$

При этом [11, с.143] для $D < 0$ будет три действительных корня уравнения (2.18)

Разумеется, они должны быть неотрицательными. Формальное решение (2.18) может быть записано в замкнутом виде. Для получения физического содержания по поводу распределения стационарных точек проще предположить малость параметра $\alpha \geq 0$, что имеет место вблизи фазового перехода. Тогда (2.18) и (2.19) дадут

$$B = B_0 - \frac{4\alpha\beta}{V_1^2}, \quad A = A_0 + \frac{2\alpha}{V_1} \quad \text{где смысл}$$

B_0, A_0 виден из (2.18).

Для исследования корней уравнения (2.18) во всей плоскости параметров $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1$

можно использовать (2.19) для которого

$$D = \frac{B^2}{27} \left(B - \frac{1}{4} A^2 \right) + C \left(-\frac{1}{27} A^3 + \frac{1}{6} AB \right) + \frac{C^2}{4} \quad (2.20)$$

Численное исследование (2.20), где A, B и C даются (2.18) при выбранном $\frac{\beta}{V_1}$, может дать

зависимость D от $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1$ и возможные

кривые перехода к бистабильности $D = 0$, причем в плоскости, p, q [11, с.144] $q^2 + p^3 = 0, p < 0$. Последнее условие $p < 0$ в силу (2.18), (2.19) выполняется при $\alpha > 0$,

$\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$, и создается впечатление, что при $\frac{\alpha}{V_1} > 0, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$ всегда есть кривые $D = 0$. Вместе с тем аналитический расчет (2.20) для малых $\frac{\alpha}{V_1} > 0$ дает

$$D = \frac{B_0^2}{27} \left(B_0 - \frac{1}{4} A_0^2 \right) + \chi \frac{\alpha}{V_1} + 3 \frac{\alpha^2}{V_1^2} + \gamma \frac{\alpha^3}{V_1^3} \quad (2.21)$$

$$\chi = -\frac{\beta^5}{4V_1^5} \left\{ 1 - 4 \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 - \frac{1}{27} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^3 \right\}$$

$$B_0 - \frac{1}{4} A_0^2 = -\frac{\beta^2}{4V_1^2} \left\{ \frac{9}{4} + \frac{5}{2} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right) + \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 \right\}$$

При малых $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1$ получится

$$D = -\frac{\beta^6}{48V_1^6} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 \left\{ 1 + \frac{10}{9} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 \right\} - \frac{1}{4} \frac{\alpha}{V_1} \frac{\beta^5}{V_1^5} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{V_1^2} \frac{\beta^4}{V_1^4} + \frac{4}{27} \frac{\alpha^3}{V_1^3} \frac{\beta^3}{V_1^3} \quad (2.22)$$

т.е. $D < 0$ и будет три действительных корня уравнения (2.18) $I_{1,2,3}$. При этом $D = 0$

при малых $\frac{\alpha}{V}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1$ имеет вид:

$$-\frac{\alpha}{V_1} \approx \frac{\beta}{12V_1} \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 \right)^2 \quad (2.23)$$

что выполняется лишь при $-\frac{\alpha}{V_1} \geq 0$, т.е.

в левой полуплоскости $\frac{\alpha}{V_1} < 0$, где имеется

устойчивость линейного решения c_1 .

Это несколько необычно, поскольку вся теория § 2 основана на том, что первая гармоника c_1 является ведущим параметром при триггерном переходе от стационарного состояния $c_1 = 0$, после потери устойчивости линейного решения, и имеет место для

$\alpha > 0$. Вместе с тем, вся теория ведущего параметра c_1 по сравнению с амплитудой второй гармоники c_2 , может быть применена, и в данном случае малых $\alpha \leq 0$, когда $e^{-\alpha t}$ для c_1 при $t \rightarrow \infty$ затухает гораздо медленнее, чем $e^{-\beta t}$ для c_2 , причем, фазовый переход через $D = 0$ проходит для малых $\alpha \leq 0$. Все эти выводы следуют из (2.21), (2.23) и теории [11, с.144].

Разумеется, численный расчет стационарных точек по (2.14) и по точной формуле (2.22) может выявить и для немалых $\alpha > 0$ наличие кривой $D = 0$ и отличных от $I = 0, I = a^{(1)}$ из (2.7), и других стационарных точек $I > 0$. Следует отметить, что согласно критерию Гурвица число положительных корней $I > 0$ уравнения (2.18) равно числу перемен знака 1, $-A, B, C$ [20] с. 201, причем для малых

$$\alpha > 0, \frac{V^2}{\beta} - V_1 > 0, -A > 0, B < 0, C < 0,$$

имеется одна переменна знака от $-A$ к B и один корень $I > 0$, т.е. $I = a^{(1)}$.

Для конечных значений $\alpha > 0, \frac{V^2}{\beta} - V_1 > 0$ снова $B < 0, C < 0$, однако может быть $-A < 0$ и опять будет один корень $I > 0$. Возможно он будет отличаться от $a^{(1)}$ по (2.7), т.к. уже I не мало, причем для $\alpha = 0$ и конечных $\frac{V^2}{\beta} - V_1 > 0$ он дается (2.25).

С другой стороны при малых $-\alpha > 0$ вблизи

$$D = 0 \text{ по (2.23) } \alpha \sim \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right)^2 \text{ можно}$$

допустить, что $-A > 0, B < 0, C > 0$ имеется два знака и два корня $I > 0$, что подтверждает выше указанный вывод [11, с.144] о наличии фазового перехода $D = 0$ при малых $-\alpha > 0$. Следует отметить, что вблизи точки бифуркации $\alpha = 0, C = 0$, кубическое уравнение (2.18) имеет решение $I = 0$,

$$I^2 + \frac{3}{2} \frac{\beta}{V_1} I - \frac{\beta^2}{V_1^3} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1 \right) = 0 \quad (2.24)$$

решение которого $I = a^{(1,3)}$,

$$a^{(1,3)} = -\frac{3\beta}{4V_1} \pm \sqrt{\left(\frac{3\beta}{4V_1}\right)^2 + \frac{\beta^2}{V_1^3} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right)} \quad (2.25)$$

причем для малых $\frac{V^2}{\beta} - V_1 > 0$ из (2.25)

$$I = a^{(1)}, \quad a^{(1)} \approx \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right) \frac{2\beta}{3V_1^2} \text{ также мало}$$

и получается из решения (2.7) при $\alpha = 0$, т.е. (2.8), а второй корень $a^{(2)} \approx -\frac{3\beta}{2V_1}$ следует

отбросить, при этом $a^{(2)} < 0$ для любых $\frac{V^2}{\beta} - V_1 > 0$, а $a^{(1)} > 0$ дается (2.25) и, вообще говоря, не мал. Для численного расчета (2.19) и проверки указанных в выводах можно прямо использовать решение [19, с.47]. Решение уравнения (2.18) имеет вид: [19]

$$I_{1,2,3} = y_{1,2,3} + \frac{A}{3},$$

$$y_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}} \quad (2.26)$$

$$y_{2,3} = \frac{y_1 \pm i \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}}{2} \sqrt[3]{3}$$

Поскольку вблизи области бифуркации $-D \approx 0$, (2.26) дает

$$y_1 \approx \sqrt[3]{q} \left(1 - \frac{1\sqrt{D}}{3q} - \frac{1D}{9q^2}\right) - \sqrt[3]{q} \left(1 + \frac{1\sqrt{D}}{3q} - \frac{1D}{9q^2}\right),$$

$$y_1 \approx -2\sqrt[3]{q}, \quad (2.27)$$

$$I_1 = \frac{A}{3} - 2\sqrt[3]{q}, \quad I_1 \approx A,$$

$$y_{2,3} \approx \sqrt[3]{q} \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{-D}}{q^{\frac{2}{3}}}$$

$$-D \approx \frac{\beta^6}{48V_1^6} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right)^2 + \frac{1}{4} \frac{\alpha\beta^5}{V_1^6}$$

Подставляя (2.18), (2.19) можно получить три действительных $I_{1,2,3}$. В частности, для малых $-D$ в окрестности точки бифуркации, где $\alpha, \frac{V^2}{\beta} - V_1, D$ малы, получится

$$C \approx 0, \quad B \approx 0, \quad A \approx -\frac{3\beta}{2V_1}, \quad q \approx -\frac{A^3}{27},$$

$I_1 \approx A = -\frac{3\beta}{2V_1}$, который получается и из

(2.25). В силу (2.19), (2.26), (2.27) получится:

$$\sqrt[3]{q} \approx \frac{\beta}{2V_1} + \frac{\beta}{3V_1^2} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right)$$

$$I_{2,3} = \frac{\beta}{3V_1^2} \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right) \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-D}}{3 \frac{2}{q^{\frac{2}{3}}}} = \frac{\beta}{3V_1} \left(\frac{V^2}{\beta} - 1\right) \pm$$

$$\pm \frac{\beta}{V_1} \sqrt{\left(\frac{V^2}{\beta} - 1\right)^2 + \frac{12\alpha}{V_1}} \quad (2.28)$$

Отсюда получится для $I_2 = a^{(1)}$, совпадающее с решением квадратного уравнения (2.6), даваемым (2.7), причем и для немалых $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$ можно использовать это решение

в качестве стационарной устойчивой точки, в которую переходит решение $c_1^2 = I$ из стационарной неустойчивой точки $c_1 = 0$.

При этом для $\alpha = 0$ и немалых $\frac{V^2}{\beta V_1} - 1 > 0$

этот вывод следует из решения кубического уравнения, $I = a^{(1)}$ данного в (2.25).

Таким образом при $\alpha = 0$ исследование точного уравнения (2.18) дало снова только одно $I > 0$ из (2.7), (2.8), (2.28), которое можно экстраполировать и для любых $\alpha > 0$. Тогда можно использовать более общее решение (2.26), численно определяя корни $I > 0$, а проще построив рисунки $\varphi(I)$, найдя минимумы $\varphi(I)$. Как показано в (2.15) при

$$I = a^{(1)}, \quad \varphi < 0, \quad 4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \approx \frac{V^2}{\beta} - V_1 \text{ и имеет}$$

место переход от неустойчивой точки $I = 0$ к устойчивой $I = a^{(1)}$ рис.2-рис8. Поведение стационарных точек для произвольных положительных $\alpha, \left(\frac{V^2}{\beta} - V_1\right)$ и соответствующих

кривых $\varphi(I)$ вдали от критической точки может быть определено только численно решением (2.18), (2.19), (2.26). Представляет интерес и наличие переходной линии бифур-

кации $D = 0$ в плоскости $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1$, [11, с.144] которую можно искать только численно, хотя и приближенный расчет типа (2.21) - (2.23) показывает, что по крайней мере для малых $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1} - 1, D = 0$, будет лишь при $\frac{\alpha}{V_1} < 0$, причем порядок малости $-\frac{\alpha}{V_1} \sim \left(\frac{V^2}{\beta V_1} - 1\right)^2$, что находится в соответствии с приближенной формулой (2.7). На рис. 2- рис.8 приведены графики $\frac{\varphi(I)}{V_1}$ в функции от I , посчитанные по (2.4) для соответственных указанных там значений постоянных $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1}$ и в конце §2 приведена таблица значений $\frac{\varphi(I)}{V_1}$, где в первом столбце даны I , а последующие соответствуют указанным на подписях к рисункам 2-8. значениям $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1}$. При этом два последние столбца таблицы соответствуют $\alpha < 0$ и значениям $\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1}$ близким к линии фазового перехода $D = 0$ [11, с.144], причем, берутся небольшие и большие значения $-\frac{\alpha}{V_1}, \frac{V^2}{\beta V_1}$, для последних, значения потенциала $\frac{\varphi(I)}{V_1}$ в стационарной точке, после фазового перехода от малых значений, велики по модулю, что может представлять интерес в приложениях. Кроме того, используя (2.7) и (2.15), (2.16) можно получить сравнение приближенных расчетов с точными, даваемыми таблицей 1 и получаемой из нее, картиной $\frac{\varphi(I)}{V_1}$ на рисунках.2 -8.

На всех рисунках имеется указанный фазовый переход от неустойчивой стационарной точки $c_1 = 0, I = 0$ к устойчивой стационарной точке $c_1 = \sqrt{a^{(1)}}$, только на

рисунке 5а имеется около $I = 0$, небольшой максимум $\varphi(I)$, соответствующий неустойчивой стационарной точке, от которой происходит фазовый переход к стационарной устойчивой точке $c_1 = \sqrt{a^{(1)}}$.

Кроме этого случая, также судя по значениям точки перегиба $\varphi(I)$ (2.12), по крайней мере для небольших $\frac{\alpha}{V_1}$, можно сде-

лать вывод о том, что других стационарных точек $I > 0$ в данном случае нет, и имеется триггерный переход скачком из неустойчивой стационарной точки $c_1 = 0$ в устойчивую точку $c_1 = \sqrt{a^{(1)}}$, в окрестности которой определяется c_1 , а затем и стационарная вероятность.

Приведенные исследования кривых $\varphi(I)$ коррелируют с известными положениями [1, 11] о триггерных переходах от неустойчивого латентного состояния 0, возможно и скачком, снова в устойчивое состояние $a^{(1)}$. При этом вблизи стационарной точки $a^{(1)}$, где вероятность $P(I)$ максимальна, будет почти детерминированный случайный процесс $I(t)$, который в [9] описывается методом нелинейных волн вероятности, включая крайний случай пренебрежения диффузией, $b = 0$, и записи уравнения для ударной волны вероятности $\frac{dc_1}{dt} = \alpha c_1 \pm \frac{\gamma}{2} c_1 f(c_1, t)$ и для сильных возмущений $\frac{dc_1}{dt} \approx \pm \frac{\gamma}{2} c_1 f(c_1, t)$, чем больше нарастание возмущений, тем больше f . Около стационарной точки

$$I = I_0, \left. \frac{\partial \varphi(I)}{\partial I} \right|_{I=I_0} = 0, \text{ можно полагать}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial I} \approx \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \right|_{I=I_0} (I - I_0) \text{ и для отклонений}$$

$$z = I - I_0 \text{ (2.5) даст } \frac{dz}{dt} = - \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \right|_{I=I_0} z, \text{ откуда}$$

также следует, что точка $I_0 = a^{(1)}, z = 0$ где

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I^2} \right|_{I=I_0} > 0 \text{ устойчивая, и можно найти детер-$$

минированное решение $I(t)$ в ее окрестности [11].

Таким образом, получается, что точка равновесия системы, $I_0 = a^{(1)}$ предельное при $t \rightarrow \infty$ стационарное устойчивое состояние, в которое переходит система после потери устойчивости в точке $c_1 = 0$, осуществляя фазовые переходы через нелинейное решение самоорганизации. Точки $a^{(1)}$ найдены из решения кубического уравнения $\frac{\partial \phi}{\partial I} = 0$, получаемого из (2.4), а после упрощений из (2.8). Таким образом, при малых $\alpha > 0$, $\frac{\partial I}{\partial c_1} - 1 > 0$ имеется одно стационарное значение c_1 , причем $c_1^2 = a^{(1)}$ мало и дается (2.7). При этом для рассматриваемых малых значений $I = a^{(1)}$ уравнение $\frac{\partial c_1}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial c_1}$ аналогично случаю сверхпроводимости, уравнению для фазового перехода второго рода [1, с.222] в то время, как в области весьма малых $-\alpha > 0$, около $D = 0$, даваемого (2.23) будет фазовый переход первого рода [11], что находится в соответствии, не с предложением [1, с. 299] для полупроводников о наличии только фазового перехода первого рода, а с [1 с. 294] для задачи Бенара, где получены выводы о том, что вблизи критического значения числа Релея, в задаче о полупроводниках [1, с.297], соответствующего $\alpha \leq 0$, при потере устойчивости для ведущего параметра c_1 имеет место фазовый переход первого рода, а после этого, для больших значений числа Релея, соответствующих большому α , имеет место уже фазовый переход второго рода. При этом система перескакивает из равновесного состояния $c_1 = 0$, $\frac{\partial c_1}{\partial t} = 0$, соответствующего максимуму $\frac{\partial \phi}{\partial c_1}$, т.е. минимуму

$P(c_1)$ [11] при $c_1 = 0$, к равновесному устойчивому стационарному состоянию $I = a^{(1)}$, и имеет место фазовый переход первого рода [1, с.203, 217, 280, 299] разрывным переходом и гистерезисом вблизи дискриминантной кривой $D = 0$ [11, с.144], а при $\alpha > 0$ имеет место фазовый переход второго рода [1, с. 222].

$c_1 = 0$ соответствует исходному состоянию

В общем случае можно в указанной области полного нелинейного диффузионного решения для уравнения (2.1) задавать начальные условия для $f(c_1, t)$ и аналитически решать эффективно задачу методом [4], аналогичным решением (2.1) в стационарном случае в виде (2.3), а в нестационарном случае методом указанным в [4, 1].

В частном случае $b = 0$ диффузионное уравнение для вероятностей (2.1) решается известным методом ударных волн [5, 12].

При этом из (2.1) вдоль характеристик получится, $I = c_1^2$

$$dt = \frac{dI}{-2\phi'(I)2I + \frac{\gamma}{2}f(I,t)I},$$

$$f(I,t) = F(y_1), y_1 = const \quad (2.29)$$

где при $I = a^{(1)}$ задается $f\{a^{(1)}t\} = F(t)$,

$-2\phi'(I)$ есть фигурная скобка в уравнении (2.1) в обозначениях (2.4). После интегрирования вдоль них получится решение

$$t = \int \frac{dI}{-4\phi'(I)F + \frac{\gamma}{2}F(y_1)I} + y_1, f = F(y_1) \quad (30)$$

Интеграл можно вычислить, а затем определить решение на ударной волне [6].

Методом, описанным в данном параграфе, можно исследовать динамику опционов на рынках, проводя, как и в [12], [17], нелинеаризацию известного линейного уравнения “Black-Sholes” [7], выделяя амплитуду первой гармоники c_1 в качестве ведущего параметра и далее вычисляя по (2.8), (2.2) конечное стационарное состояние и вероятность. Те же методы применимы и к рассмотренному традиционным подходом §3, уравнению движения транспорта [6, 18] с добавлением диффузии и релаксации.

3. Решение задачи стохастического процесса в полупроводниках методом волновой динамики

Применим прямой метод нелинейных волн [4, 12, 17] к задаче § 1.

Полагая
 $E = E_0 + E'$, $v(E) \approx v(E_0) + v'(E_0)E'$,
 $e' n_0 v(E_0) = -\frac{4\pi}{\epsilon_0} I_0$, можно получить из

(1.4) уравнение

$$\frac{\partial E'}{\partial t} = e' n_0 v'(E_0) E' - \{v(E_0) + v'(E_0)E'\} \frac{\partial E'}{\partial x} + D \frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

где D может быть функцией t . Сделав замену $E' = \bar{E} e^{e' n_0 v'(E_0)t}$ получим

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -v(E_0) \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} - \gamma(t) \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + D(t) \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2},$$

$$\gamma(t) = v'(E_0) e^{2e' n_0 v'(E_0)t} \quad (3.2)$$

и после перехода к эйконалу $X = x - v(E_0)t$,

и вводя $B(t) = \int_0^t D(t) dt$, найдем

$$\left. \frac{\partial \bar{E}}{\partial B(t)} \right|_x = -\gamma(t) \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + D(t) \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} \quad (3.3)$$

Предполагая еще $\frac{\gamma(t)}{D(t)} = \frac{\gamma}{b}, \frac{\gamma}{b} = const$

получим

$$\left. \frac{\partial \bar{E}}{\partial B(t)} \right|_x = -\frac{\gamma}{b} \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

Таким образом, в детерминистическом подходе можно на участке кривой, $v(E)$, где $v'(E) < 0$, определить [7] решение $E'(x, t)$ нелинейного уравнения Бюргера (3.4) для сглаженной ударной волны. При этом можно, как нами было сделано в задаче о движении машин, рассмотреть наличие дельта-флуктуаций и сделать это, в отличие от §1, §2, не для амплитуд гармоник в (1.11), (1.14), а прямо в (3.4). Удобно вернуться к переменным t, x обозначить $v(E_0) = a_0$, $\bar{E} = \rho'(x, t)$. Тогда получится:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \gamma \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} = D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + F \quad (3.5)$$

где F есть дельта-коррелированные флуктуации E напряженности поля с корреляционной функцией $\langle F(x', t') F(x, t) \rangle = b \delta(x - x') \delta(t - t')$
 a_0, γ, D - есть постоянные.

Тогда можно получить функциональное уравнение Фоккера-Планка [1] для вероят-

ности $P(t, x, \rho')$ стохастического процесса для $\rho' = \bar{E}$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \int_0^x dx \frac{\delta}{\delta \rho'} \left(a_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \gamma \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} - D \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \right) P + \int_0^x dx \frac{b}{2} \frac{\delta^2 P}{\delta \rho'^2} \quad (3.6)$$

где функциональная производная $\frac{\delta}{\delta \rho'}$,

от функционала ϕ [2]

$$\frac{\delta \phi(\rho', x, t)}{\delta \rho'} = \quad (3.7)$$

$$= \lim_{\int dx \delta \rho' \rightarrow 0} \frac{\int dx \{ \phi(\rho' + \delta \rho', x, t) - \phi(\rho', x, t) \}}{\int dx \delta \rho'}$$

Поскольку, можно показать, что [2, 4]

$$\lim_{\int dx \delta \rho' \rightarrow 0} \frac{\int \delta \frac{\partial f(\rho')}{\partial x} dx}{\int dx \delta \rho'} = f'(\rho') \frac{\partial \rho'}{\partial x},$$

$$\lim_{\int dx \delta \rho' \rightarrow 0} \frac{\int \delta \frac{1}{2} \left(\frac{\delta \rho'}{\partial x} \right)^2 dx}{\int dx \delta \rho'} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2},$$

$$\text{взяв } f(\rho') = \frac{\rho'^2}{2}, f(\rho') = \frac{\rho'^3}{3}$$

соответственно, и записав (3.4) в виде [1]

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \frac{\delta V(\rho')}{\delta \rho'}, \text{ где } V(\rho') \text{ потенциал, ,}$$

$$V = \int a_0 \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \int \gamma \rho'^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{D}{2} \int \frac{\partial \rho'^2}{\partial x} dx$$

откуда, после интегрирования, можно получить:

$$V = a_0 \frac{\rho'^2}{2} + \frac{\gamma \rho'^3}{3} + \frac{D}{2} \int \left(\frac{\partial \rho'}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3.8)$$

причем после раскрытия функциональной производной $\frac{\delta V}{\delta \rho'}$ снова получится. (1.4)

Тогда для стационарного случая $t \rightarrow \infty$, $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, где в стационарном случае

$\rho'(x, t) = \rho'(x)$, асимптотическое решение уравнения (3.6) с учетом указанных пределов, дает

$$P = N \exp \phi, \quad \phi = -\frac{2}{b} V \quad (3.9)$$

где V дается (3.8), причем ρ' есть стационарное решение, определяемое из уравнения

$$a_0 \rho'(x) + \frac{\gamma}{2} \rho'^2(x) = D \frac{d\rho'(x)}{dx} \quad (3.10)$$

в виде известной логистической функции [3]

$$\rho'(x) = \frac{\frac{2 a_0}{\gamma}}{4 + \left(\frac{2 a_0}{\gamma \rho'_0} - 1 \right)} \quad (3.11)$$

Приведенное решение (1.4), (3.11), является более удобным для приложений, чем детальное рассмотрение §1, §2.

4. Рассмотрение областей экстремальных процессов в биофизике.

В процессах синтеза белков исследуется [10 с.106-118] синтез молекул m-РНК, несущих информацию о их структуре, методом кинетических уравнений, получены стационарные состояния. Проведано исследование их на устойчивость, образование при некоторых значениях управляющего параметра точек бифуркации с последующим триггерным переходом в новое когерентное, почти детерминированное состояние, с учетом флуктуаций, причем эти явления можно изучать методом §2, включая нелинейность по вероятности P [3].

Эти детальные рассмотрения могут быть использованы также в биофизической задаче о биосенсорах. В работе Карапетяна А.Т., Аветисяна Г.А. и Аракеляна В.Б. [10]. дано кинетическое уравнение для числа связанных лигандов $x(t)$ на ДНК дуплексе при наличии ланжевенковского шума

$$\frac{dx}{dt} = k_1 c_f \{N - (2n-1)x\} - k_{-1} x, \quad N(t) = \bar{N} + \sigma_N^2(t) \quad (4.1)$$

где k_1, k_{-1} постоянные скоростей реакций образования и распада комплекса лигандов, \bar{N}, σ_N^2 среднее значение и дисперсия числа флуктуирующих адсорбционных центров на ДНК лигандов на каждой ДНК. В их работе определены методом [11] средние значения

$\bar{x}(t), \overline{\Delta x^2(t)}, \Delta x = x(t) - \bar{x}(t)$, времена релаксации и стационарное значение вероятности процесса.

При этом для стохастического уравнения (4.1) уравнение Фоккера –Планка [1, 3]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \frac{\partial \{k_1 c_f \bar{N} - k_{-1} x - (2n-1)k_1 c_f x\} P}{\partial x} + \frac{b}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (4.2)$$

$$b = k_1 c_f \sigma_N^2$$

где $P(x, t)$ есть вероятность процесса.

В стационарном случае $\frac{\partial P}{\partial t} = 0$, причем

$$P(x) = N e^{\frac{2}{b} V(x)},$$

$$V(x) = - \left\{ k_{-1} + (2n-1)k_1 c_f \right\} \frac{x^2}{2} + k_1 c_f \bar{N} x \quad (4.3)$$

известный потенциал стационарного состояния, $t \rightarrow \infty$ процесса [1, с.299], $N = P(0)$. В нелинейной постановке методом нелинейной волновой динамики [4, 12] аналогично §2, можно вначале просто в скорость линейной волны данной задачи $k_1 c_f$ добавить в формулу $P(x)$ (4.3) нелинейное слагаемое,

т.е. заменить $k_1 c_f$ на $k_1 c_f + \frac{\gamma}{2} P(x)$, а также,

можно согласно §2, делать эту замену в (4.2) и получать другое, чем (4.3), выражение для $P(x)$. В первом упрощенном подходе получится

$$P(x) = N e^{\frac{2}{b} \left\{ -k_{-1} \frac{x^2}{2} - (2n-1) \left(k_1 c_f + \frac{\gamma}{2} P \right) \frac{x^2}{2} + \left(k_1 c_f + \frac{\gamma}{2} P \right) \bar{N} x \right\}} \quad (4.4)$$

а во втором, более общем, подходе

$$P(x) = N e^{\frac{\left(x - \frac{\bar{N}}{(2n-1)} \right)^2 \gamma}{2b} - \frac{\left(\frac{\bar{N}}{2n-1} \right)^2 \gamma}{2b} + \frac{\left(x - \frac{\bar{N}}{2n-1} \right)^2 \gamma}{2b}} + e^{\frac{\bar{N}}{2n-1} - \frac{y^2 \gamma (2n-1)}{2b}} \left\{ k_{-1} \frac{\bar{N}}{2n-1} + k_{-1} y + (2n-1) k_1 c_f y \right\} dy \quad (4.5)$$

При этом (4.4) можно решать численно итерацией, а (4.5) вычислением интеграла, разумеется задавая значения $N = P(0)$ и постоянного нелинейного коэффициента γ , для него как положительные так и отрицательные. Все эти рассуждения подходят и для более общей задачи переменного шума.

Заключение

В работах [4,12,17] было дано применение методов нелинейной волновой динамики к исследованию стохастических процессов в механике, экономике, биологии. В области экстремальных больших изменений параметров процессов в известном диффузионном уравнении для вероятностей процесса, было учтено нелинейное слагаемое в коэффициенте при первой производной по параметру, т.е. линейной скорости волны, определены все линейные и нелинейные коэффициенты по наклону экспериментальной средней кривой стохастического процесса, найдены аналитические формулы и сделаны по ним расчеты вероятностей в частном случае ударных волн, и в общем случае учета диффузии и определения сглаженных ударных волн. Эти подходы позволили развить модельные методы определения момента экономического кризиса, решить нелинейное в указанном смысле уравнение для опционов в подходе “Black-Sholes” [12] и показать хорошее соответствие с данными многих фирм, рассчитать триггерные переходы для разных биологических экстремальных процессов, решить нелинейное уравнение Фоккера-Планка для распределенных по координатам стохастических процессов [1, 4].

В настоящей статье основное внимание уделяется важным, в современных инновационных физических процессах, вопросам исследования триггерных переходов в полупроводниках [14, 16], причем, в отличие от прямого применения методов нелинейной волновой динамики [4, 17] к исследованию статистики в механических и биологических

распределенных системах, в данной работе, описываемых модельным нелинейным волновым уравнением с диссипацией [1, с.297 (8.168)] для электрического поля полупроводника, применяется метод разложения на плоские волны, развитый в [1], и для ведущего параметра, представляющего амплитуду первой гармоники, получения и исследования нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения по времени с определением критических стационарных точек с добавлением дельта-флуктуаций. Выводится уравнение Фоккера-Планка для вероятности процесса, в которое, согласно указанному методу [4, 17], добавлено нелинейное слагаемое и получено его замкнутое решение в наиболее интересной для приложений окрестности устойчивой стационарной точки. В § 3 дается также прямой метод [1] исследования вероятностей исходного уравнения для поля с учетом флуктуаций, выводится функциональное уравнение Фоккера-Планка [1], добавляется в него нелинейность [4, 12], дается эффективное решение для стационарной вероятности. Указывается на применимость этой методики к не менее важным задачам динамики опционов на рынках, описываемых нелинеаризованным уравнением “Black-Sholes”, причем нелинейный член, как и в [1 (8.168)], в отличие от [12], берется произвольным, а также в задаче о транспортных потоках [18], рассмотрено также определение вероятностей для биосенсоров [10] методом нелинейных волн [4].

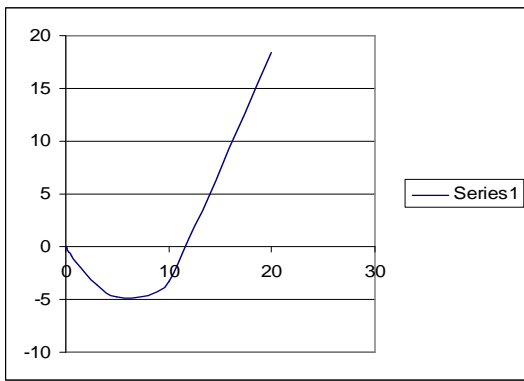


Рис.2 $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = 0.2$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 1.3$

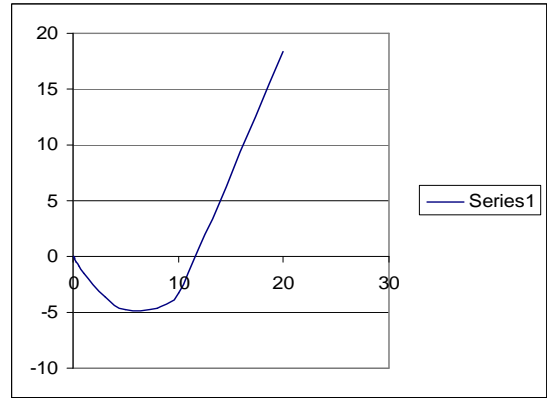


Рис.3 $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = 0.2$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 1.5$

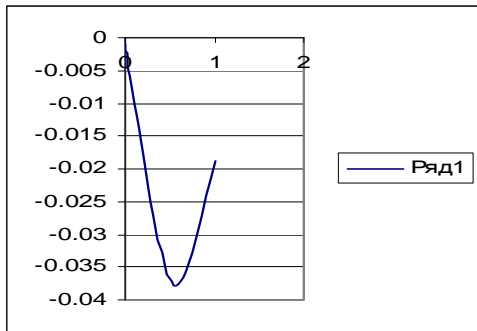


Рис.4 $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = 3$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 60$

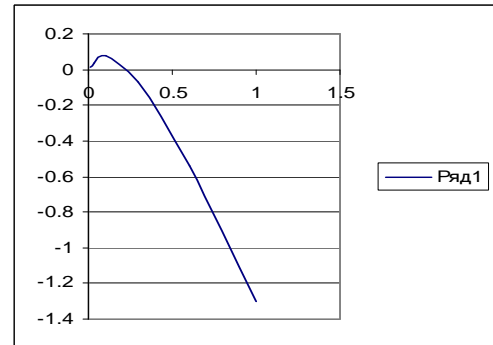


Рис.5a $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = 3.4$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 100$

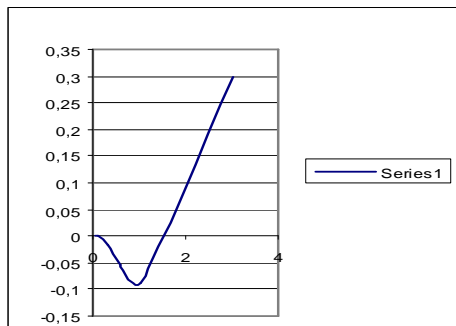


Рис.6 $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = -0.2$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 10$

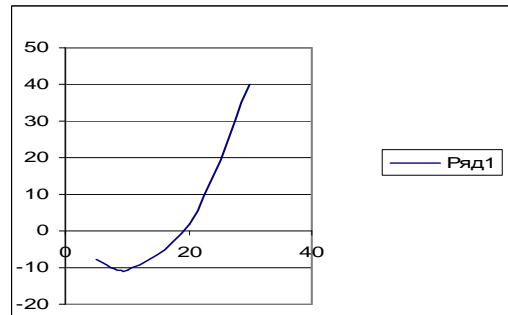


Рис.5b $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = 3.4$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 100$

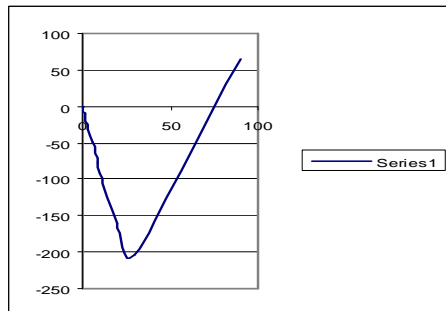


Рис.7 $\frac{\varphi}{V_1}$ от I , $\frac{\alpha}{V_1} = -20$, $\frac{V^2}{\beta V_1} = 720$

Таблица 1

0,01	-0,0003	-0,001	-0,00101	-0,01501	-0,100145267	0,000891	0,0158
0,03	-0,00092	-0,00303	-0,00305	-0,04509	-0,301229243	0,00208	0,04079
0,1	-0,003	-0,0101	-0,01029	-0,15067	-1,01125	0,001635	0,0751
0,3	-0,00545	-0,02704	-0,02822	-0,45059	-3,065723684	-0,01796	-0,07086
0,6	0,006107	-0,0375	-0,04071	-0,88714	-6,163928571	-0,05571	-0,54214
1	0,054375	-0,01875	-0,025	-1,4375	-10,28125	-0,0875	-1,3
3	0,88875	0,6675	0,645	-3,6	-30,3375	0,3	-5,025
5	2,721094	2,351563	2,3125	-4,76563	-49,4140625	1,671875	-7,90625
8	7,344	6,752	6,688	-4,64	-76,16	5,6	-10,4
10	11,67581	10,93548	10,85484	-3,30645	-92,74193548	9,467742	-10,8226
20	48,33443	46,85246	46,68852	18,36066	-160,6557377	43,80328	2,03279
30	109,9929	107,7692	107,522	65,02747	-203,5714286	103,1374	39,8736
90	1004,943	998,2694	997,5221	870,0277	63,9298893	984,1384	791,884

Литература [1]. Хакен Г. Синергетика М.: «Мир», 1980, 404с.; [2]. Полак Л.С., Михайлов А.С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: «Наука», 1983, 115с.; [3]. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике. М.: «Наука», 1975, 343с.; [4]. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В., Исследования диффузионных марковских стохастических процессов методами нелинейной волновой динамики// Нелинейный Мир. 2011 т.9, #3, с.145-167.; [5]. Багдоев А.Г., Мовсисян Л. А. Определение ударной волны в нелинейных задачах теории упругости// Известия АН Арм.ССР, Механика, 1968, т.21, #3, с. 19-24.; [6]. Lighthill M.J., Whitham G.B. On kinematic waves theory of traffic flow on long crowded roads// Proceed. Roy. Soc. 1955. #1728. ;[7]. Fisher Black, Myron Sholes. The pricing of options and corporative liabilities// Journal of Political Economy. 1973, V 81, #3 p.63-76.; [8]. Багдоев А.Г., Варданян С.В., Карапетян Г.Р., Мартиросян Г.А. Аналитические и численные исследования динамических процессов в экономике методами волновой динамики// Прикладная эконометрика, 2009, 1 (13), с.50-69.; [9]. Lighthill M.J., Viscosity effects in sound waves of finite amplitude// Survey in Mechanics. G.I. Taylor 70th anniversary. 1956, p.258-351.;[10]. Карапетян А.Т., Аветисян Г.А., Аракелян В.Б. Влияние ланжевеновского шума на ДНК-биосенсоры// Доклады НАН РА. 2010, т.110, #4, с. 376-383.; [11]. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: «Наука», 1981, с.640.; [12]. Багдоев А.Г., Варданян С.В., Карапетян Д.К., Мартиросян Г.А. Параметрические и численные исследования динамических процессов в экономике методами волновой динамики// Прикладная Эконометрика. 2009, 1(13), с.50-69. ;[13]. Сомсиков В.М. Детерминированная необратимость// Необратимые процессы в природе и технике. Труды шестой Всероссийской конференции М.. 2011, ч.1. с.34-37.;[14]. Б.Ю.Богданович, В.И.Графутин, А.Г.Залузный, В.В.Калугин, А.В.Нестерович, Е.П.Прокопьев, А.Л.Суворов, С.П.Тимошенко, Ю.А.Чаплыгин. Технологии и методы исследования структур кремний на изоляторе. М.: МИЭТ, 2003. 288 с.; [15]. Веричев Н.Н., Веричев С.Н., Ерофеев В.И. Осцилляторы в однородном кольце диффузионно-связанных динамических систем: существование, устойчивость и синтез кластерных структур// Нелинейный Мир. 2008. т. 6, #5-6, с. 398-423.; [16]. Шель Р. Самоорганизация в полупроводниках. Неравновесные фазовые переходы в полупроводниках, обусловленные генерационно-рекомбинационными процессами. М.: Мир. 1991, 459с.; [17]. Багдоев А.Г. Применение методов нелинейной волновой динамики к некоторым стохастическим процессам// Журнал проблем эволюции открытых систем. 2010, вып.12, т.1, с. 82-92.; [18]. Семенов В.В., Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. 2004г.; Браиловский Н.О., Грановский Б.И. Моделирование транспортных систем. М. 1978, 124с.; [19]. Корн Г. и Корн Т., Справочник по математике. М. «Наука», 1968, 717с. [20]. Минасян М.М., Нелинейные волны и колебания в физически активных деформируемых средах. Ереван, 2007, с.255.

Принято в печать 3.06.11

УДК 530.1 (075.8)

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДАМИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН НЕКОТОРЫХ
МОДЕЛЬНЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТРИГГЕРНЫХ ПЕРЕХОДОВ В
ПОЛУПРОВОДНИКАХ И В БИОФИЗИКЕ

Александр Георгиевич Багдоев

Республика Армения, г.Ереван, Институт механики НАН РА

Ереван 19, пр.М.Баграмяна 24б, e-mail: bagdоеv@mechins.sci.am, тел.56 82.01

THE INVESTIGATION BY METHODS OF NONLINEAR WAVES OF SAME EXTREME TRIGGER
TRANSITIONS IN SEMICONDUCTORS AND BIOPHYSICS

Alexander George Bagdov

Republic of Armenia, Yerevan, Institute of Mechanics NAS RA

Yerevan, ave. M. Baghramyan 24b, e-mail:bagdov@mechanics.sci.am tel:56 82 01

The paper is devoted to investigation by methods of nonlinear wave dynamics and method of scaling of some extremely trigger processes in semiconductors and in biophysics.

There are carried out by scaling method expansions of solution for electrical field semiconductor on plane waves with any modifications and supplementation of simulations as well as precisions of some formulae, obtained in H.Haken book, furthermore using method of nonlinear waves is derived formula for probability of steady state. If is done investigation of probabilities of phase transitions of first and second kind for Gann instability in semiconductors Besides by application of methods of wave dynamics to direct investigation of nonlinear diffusion equation with delta-fluctuations is obtained probability distribution near stationary state, in vicinity of limited steady state, as well as mean values of considered process parameter.

All obtained results are extended on dynamics of options in economics and in problem of traffic motion. Also by method of nonlinear wave dynamics are determined probabilities of stochastic processes for biosensors.