ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПЬЕЗОУПРУГИХ СРЕДАХ

Закирьянова Г.К.
Институт математики, Казахстан, г. Алматы

Рассматривается гиперболо-эллиптическая система уравнений, характерных для задач динамики пьезоупругих тел. Построен динамический аналог формулы Сомильяны для решения краевых задач в пьезоупругих средах, позволяющий по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстанавливать перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

Важное место в исследованиях по теории упругости занимают связанные задачи, в которых учитывается связь поля механических напряжений и деформаций с физическими полями другой природы (тепловыми, электромагнитными и др.). Интерес к изучению пьезоэффекта, обнару-женного французскими исследователями Пьером и Жаком Кюри в 1880г., объясняется широким спектром его приложения: в радиотехнических устройствах для стабили-зирования и контролирования частот, в кварцевых часах, приборах для обнаружения подводных лодок и многих других. Об актуальности данной проблемы свидетельствует и большое количество публикаций в данной области. К первым исследователям пьезоэффекта относятся Кельвин (молекулярная теория и механическая модель для объяснения пьезоэффекта), Поккельс (определение пьезоэлектрических постоянных ряда матери-алов, развитие теории электрооптического эффекта в кристаллах), Дюгем (формулировки пьезоэлектрических явлений), Фойгт (систематизация исследований по пьезоэлектричеству до первой мировой войны), В. Коленко (установление зависимости пироэлектрического эффекта от симметрии кристаллов), Ю.В. Вульф (открытие существования двух типов пироэлектричества). В исследование этого явления весомый вклад внесли также Р.Е Гиббс, Борн, П. Ланжевен, Никольсон, У. Кэди, У. Мэзон, Г.Липпман, А.Р. Хатсон, Дж. Мак-Фи, Д.Л. Уайт, Ф.Г. Басс, С.А.Гредескул, М.И. Каганов, Ю.В. Гуляев, В.И. Пустовойт, В. Новацкий, М.К. Балакирев, И.А. Гилинский и др. [1-3].

Здесь рассматриваются анизотропные пьезоэлектрические среды, характеризующиеся отсутствием центральной симметрии. В пространстве обобщенных функций записаны уравнения движения и их решения для рассматриваемых сред. Построен динамический аналог формулы Сомильяны для решения краевых задач в пьезоупругих средах, позволяющий по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстанавливать перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

1. Уравнения состояния и движения пьезоупругих сред.

Пьезоэлектрический эффект имеет место в анизотропных средах, не обладающих центром упругой симметрии, в этом случае пьезоэлектрические константы $e_{lij}\neq 0$. Поскольку в пьезоупругих средах упругое и электрическое поля связаны между собой, в общем случае такие среды описываются пьезоэлектрическим тензором, содержащим 45 констант ($C_{ij}^{ml(E)}$ – 21, e_{lij} – 18, κ_{il} – 6):

$$C_{ij}^{ml}=\begin{cases} C_{ij}^{ml(E)}, & i,j,m,l=\overline{1,N} \\ e_{lij}, & i,j,l=\overline{1,N},\ m=M \\ e_{iml}, & j,m,l=N,\ i=M \\ -\kappa_{il}, & j,m=N,\ i,l=M \end{cases} \qquad (1)$$

где $C_{ij}^{ml(E)}$ – матрица упругих констант, измеренных при постоянном электрическом поле, удовлетворяющая условию

$$W(\nu)=\sum_{i,j,m,l}^{N} C_{ij}^{ml(E)} \nu_m^i \nu_l^j > 0 \ \forall \nu ,$$

e_{lij} – пьезоэлектрические константы, κ_{il} – диэлектрические проницаемости, измеренные при постоянной деформации, N – размерность пространства ($N=2$ при плоской деформации, $N=3$ соответствует пространственному случаю), $M=N+1$. Константы $C_{ij}^{ml(E)}$, e_{lij}, κ_{il} обладают следующими свойствами симметрии по отношению к перестановке индексов:

$$C_{ij}^{ml(E)}=C_{ij}^{lm(E)}=C_{ji}^{ml(E)}=C_{ml}^{ij(E)}, \qquad (2)$$
$$e_{lij}=e_{lji}, \qquad \kappa_{il}=\kappa_{li}$$

и имеют вид, например, для кристалла триклинной системы с кристаллической решеткой с наименьшей симметрией:

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11(E)} & C_{11}^{22(E)} & C_{11}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22}^{22(E)} & C_{22}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33}^{33(E)} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{23}^{23(E)} & 0 & 0 \\ & & & & C_{31}^{31(E)} & 0 \\ & & & & & C_{12}^{12(E)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ & \kappa_{22} & 0 \\ & & \kappa_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{123} & 0 & 0 \\ 0 & e_{231} & 0 \\ 0 & 0 & e_{312} \end{pmatrix} (*)$$

Первые две матрицы в (*) симметричные, поэтому члены ниже главной диагонали относительно ее симметричны. Для ромби-ческой системы имеют место 9 коэффициентов $C_{ij}^{ml(E)}$, по 3 коэффициента e_{lij} и κ_{il}

$$\begin{pmatrix} C_{11}^{11(E)} & C_{11}^{22(E)} & C_{11}^{33(E)} & C_{11}^{23(E)} & C_{11}^{31(E)} & C_{11}^{12(E)} \\ & C_{22}^{22(E)} & C_{22}^{33(E)} & C_{22}^{23(E)} & C_{22}^{31(E)} & C_{22}^{12(E)} \\ & & C_{33}^{33(E)} & C_{33}^{23(E)} & C_{33}^{31(E)} & C_{33}^{12(E)} \\ & & & C_{23}^{23(E)} & C_{23}^{31(E)} & C_{23}^{12(E)} \\ & & & & C_{31}^{31(E)} & C_{31}^{12(E)} \\ & & & & & C_{31}^{12(E)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ & \kappa_{22} & 0 \\ & & \kappa_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{123} & 0 & 0 \\ 0 & e_{231} & 0 \\ 0 & 0 & e_{312} \end{pmatrix}$$

В силу (2) имеем $C_{ij}^{ml}=C_{lm}^{ji}$.

В пьезоупругих средах упругое и электрическое поля связаны между собой и описываются линейными уравнениями состояния [3]:

$$\sigma_{ij}=C_{ij}^{ml(E)}u_{m,l}-e_{lij}E_l, \quad i,j,m,l=\overline{1,N} \ (3)$$

$$D_j=e_{jml}u_{m,l}+\kappa_{jl}E_l, \quad j,m,l=\overline{1,N} \quad (4)$$

где $u=(u_1,\ldots,u_N)$ – перемещения упругой среды, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, D_i – компоненты вектора электрических смещений, E_l – компоненты вектора напряженности электрического поля, $u_{i,j}=\partial_j u_i=\partial u_i/\partial x_j$, $x=(x_1,\ldots,x_N)\in R^N$ Здесь и всюду по одноименным индексам в произведении проводится суммирование в указанных выше пределах изменения индексов.

Подставим соотношения (3), (4) в уравнения движения для электроупругой среды:

$$\sigma_{ij,j}+G_i=\rho u_{i,tt},$$

$$D_{j,j}=\rho_e$$

где ρ – плотность среды, G_i – компоненты массовой силы, $u_{i,tt}=\partial^2 u_i/\partial t^2$, t – время, ρ_e – плотность электрического заряда. Учитывая, что пьезоэлектрики являются диэлектриками, которым свойственно отсутствие свободных электрических зарядов ($\rho_e \equiv 0$), получим следующую систему уравнений динамики для пьезоупругих сред:

$$C_{ij}^{ml(E)} u_m,_{lj} - e_{lij}\varphi,_{lj} = \rho u_i,_{tt} - G_i \qquad (5)$$

$$e_{jml} u_m,_{lj} - \kappa_{jl}\varphi,_{lj} = 0\,, \quad E_m = -\varphi,_m \qquad (6)$$

Таким образом, для исследования нестационарных процессов в пьезоупругих средах необходимо рассматривать систему уравнений смешанного типа: уравнения гиперболического типа (5), описывающие анизотропные упругие среды, и уравнение эллиптического типа (6) –уравнение электрического поля.

2. Обобщенные решения уравнений движения пьезоупругой среды. Условия на фронтах.

Введем вектор $\upsilon = (\upsilon_1, ... \upsilon_{N+1})$, объединяющий упругие перемещения и электрический потенциал:

$$\upsilon_j := \begin{cases} u_j, & j = \overline{1, N} \\ \varphi, & j = N+1 \end{cases}, \qquad (7)$$

матрицу напряжений T_{ij}, содержащую тензор напряжений Коши и электрический вектор перемещений, а также матрицу деформаций Z_{ml}, содержащую тензор упругих деформаций $\varepsilon_{ml} = 0{,}5(u_m,_l + u_l,_m)$ и вектор напряженности электрического поля:

$$\mathrm{T}_{ij} := \begin{cases} \sigma_{ij}, & j = \overline{1, N} \\ D_i, & j = M \end{cases},$$

$$Z_{ml} := \begin{cases} \varepsilon_{ml}, & m = \overline{1, N} \\ -E_l, & m = M \end{cases} \qquad (8)$$

векторный поток p_i, объединяющий вектор нагрузки $g_i = \sigma_{ij} n_j$ и плотность потока заряда $q = D_j n_j$, и вектор источников $\tilde{G}_i$, содержащий массовые силы

$$p_i := \begin{cases} g_i, & i = \overline{1, N} \\ q, & i = M \end{cases},$$

$$\tilde{G}_i := \begin{cases} G_i, & i = \overline{1, N} \\ 0, & i = M \end{cases} \qquad (9)$$

Аналог закона Гука (связь между Σ и Z) и соотношение для вектора потока запишем в виде:

$$\mathrm{T}_{ij} = \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{N} C_{ij}^{ml} Z_{ml}\,, \; i = \overline{1, N+1}, \quad j = \overline{1, N} \; (10)$$

$$p_i = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{T}_{ij} n_j \quad i = \overline{1, N+1} \qquad (11)$$

Таким образом, с учетом введенных выше обобщений (1), (7) – (9), уравнения движения для пьезоупругой среды можно записать в следующем операторном виде:

$$L_{im}(\partial_x, \partial_t)\upsilon_m(x,t) + \tilde{G}_i(x,t) = 0 \qquad (12)$$

$$L_{im}(\partial_x, \partial_t) = C_{ij}^{ml}\partial_j\partial_l - \rho\tilde{\delta}_{im}\partial_t^2\,,$$

$$i, m = \overline{1, N+1}\,, \quad j, l = \overline{1, N}$$

$$\tilde{\delta}_{im} := \begin{cases} \delta_{im}, & i, m = \overline{1, N} \\ 0, & i = m = N+1 \end{cases},$$

где $\partial_x = (\partial_1, ..., \partial_N)$, $x \in S^- \subset R^N$, δ_{ij} – символ Кронекера. Поскольку электрическое поле квазистатическое, система (12) гиперболо-эллиптического типа. В силу положительной определенности W характеристическое уравнение системы (12) имеет действительные корни c, в общем случае зависящие от направления распространения волны [4].

Как известно [5], решения гиперболических уравнений могут иметь характеристические поверхности, на которых наблюдаются скачки производных. Для вывода условий на скачках удобно воспользоваться аппаратом теории обобщенных функций [6-8].

Обозначим через $D'_M(R^{N+1})$ пространство обобщенных вектор – функций $\hat{f}(x,t) = (\hat{f}_1, ..., \hat{f}_M)$, определенных на пространстве $D_M(R^{N+1})$ финитных бесконечно дифференцируемых вектор – функций $\varphi(x,t)=(\varphi_1,...,\varphi_M)$. Для регулярных $\hat{f}$

$$\left(\hat{f}(x,t),\varphi(x,t)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}d\tau\int_{R^N}f_i(x,\tau)\varphi_i(x,\tau)dV(x)$$

$$\forall\varphi\in D_M(R^{N+1}),\ dV=dx_1...dx_N,\ \ i=\overline{1,M}$$

Пусть $\upsilon(x,t)$ – решение (12), непрерывное, дважды дифференцируемое почти всюду, за исключением характеристической поверхности F, неподвижной в R^{N+1}, и подвижной в R^N (волновой фронт F_t), на которой производные могут иметь скачки. Уравнение для такой поверхности F подобно характеристическому уравнению системы (12) и имеет вид:

$$\det\begin{pmatrix} C_{ij}^{ml}n_l n_j-\rho\delta_{ij}n_t^2 & -e_{lij}n_l n_j \\ e_{jml}n_l n_j & -\kappa_{jl}n_l n_j \end{pmatrix}=0,$$

$$i,m=\overline{1,M},\quad j,l=\overline{1,N}$$

Здесь (n,n_t) – вектор нормали к F в R^{N+1}, n – единичный волновой вектор в R^N, направленный в сторону распространения F_t. Предполагается, что поверхность F кусочно-гладкая с непрерывной нормалью на ее гладкой части. Скорость движения поверхности F в пространстве R^N, как известно, равна

$$c=-n,_t/\|n\|_{R^N} \qquad (13)$$

Решение $\upsilon(x,t)$, рассматриваемое как регулярная обобщенная функция, обозначим через $\hat{\upsilon}(x,t)=\upsilon(x,t)$. Аналогично $\tilde{\hat{G}}(x,t)=\tilde{G}(x,t)$.

Пусть $\hat{\upsilon}(x,t)$ – решение (12) в пространстве $D'_M(R^{N+1})$. Такое решение будем называть *обобщенным решением* (12) или *решением в обобщенном смысле*. Обозначим $[f]_{F_t}$ – скачок f на волновом фронте F_t:

$$[f(x,t)]_{F_t}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(f(x+\varepsilon n,t)-f(x-\varepsilon n,t)\right)$$

Т е о р е м а 1. *Если $\upsilon(x,t)$ удовлетворяет (12) почти всюду за исключением волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки*

$$[u_i(x,t)]_{F_t}=0,$$

$$\left[\sigma_{ij}n_j+\rho c u_i,_t\right]_{F_t}=\left[e_{lij}E_l n_j\right]_{F_t}, \qquad (14)$$

$$[\varphi(x,t)]_{F_t}=0,\qquad [D_j]_{F_t}=0 \qquad (15)$$

то $\hat{\upsilon}(x,t)$ является обобщенным решением (12).

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом правил дифференцирования обобщенных функций, подставим обобщенные функции $\tilde{G}_i$, $\hat{\upsilon}_i(x,t)$ и их соответствующие производные в (12). В результате получим следующие выражения

$$L_{im}(\partial_x,\partial_t)\hat{\upsilon}_m(x,t)+\hat{\tilde{G}}_i(x,t)=$$

$$C_{ij}^{ml}\partial_j\partial_l\upsilon_m+\tilde{G}_i-\rho\tilde{\delta}_{im}\ddot{\upsilon}_m+ \qquad (16)$$

$$+C_{ij}^{ml}\left([\upsilon_m]_F\nu_l\delta_F(x,t)\right),_j-\rho\left([\upsilon_m]_F\nu_t\delta_F(x,t)\right),_t+$$

$$+\left[\sigma_{ij}\nu_j-\rho\upsilon_m,_t\nu_t\right]_F\delta_F(x,t)$$

$$i,m=\overline{1,M},\quad j,l=\overline{1,N},$$

здесь $\alpha(x,t)\delta_F(x,t)$ сингулярная обобщенная функция – простой слой на F с плотностью α:

$$\left(\alpha(x,t)\delta_F(x,t),\varphi(x,t)\right)=$$

$$=\int_F\alpha_i(x,t)\varphi_i(x,t)dS(x,t),$$

$$\forall\varphi(x,t)\in D_M(R^{N+1}),$$

$dS(x,t)$ – дифференциал площади поверхности в точке (x,t); $(\nu,\nu_t)=(\nu_1,...,\nu_N,\nu_t)$– единичный вектор, нормальный к характеристической поверхности *F*.

Функция $\hat{\upsilon}(x,t)$ будет удовлетворять уравнениям (12) в обобщенном смысле, если правая часть выражения (16) равна нулю. Естественное требование непрерывности решений при переходе через волновой фронт *F*, а также непрерывность электрического потенциала на фронте в силу отсутствия заряда в среде

$$\left[u_i(x,t)\right]_F = 0, \ \left[\varphi(x,t)\right]_F = 0 \qquad (17)$$

ввиду (12) обращают в нуль все слагаемые правой части (16), кроме последнего слагаемого. Следовательно, необходимо, чтобы

$$\left[\sigma_{ij}\nu_j - \rho\upsilon_{i},_t \nu_t\right]_F = 0 \ .$$

Запишем эти условия на соответствующем подвижном волновом фронте F_t. В силу (3), (4), (13) имеем

$$\left[C_{ij}^{ml(E)} u_m,_l n_j + \rho c u_i,_t - e_{lij} E_l n_j\right]_{F_t} = 0, (18)$$

$$\left[e_{jml} u_m,_l - \kappa_{jl}\varphi,_l\right]_{F_t} = 0 \qquad (19)$$

В силу (13) условия (18), (19) преобразуются к виду (14), где c – скорость фронта волны, и (15). Условие (14) – закон сохранения импульса на волновых фронтах [4]. Теорема доказана.

Следствие. *Справедливо равенство*

$$\left[n_l u_i,_t + c u_i,_l\right]_{F_t} = 0, \ i = \overline{1,M}, \ l = \overline{1,N}$$

Последнее равенство является условием непрерывности касательных производных перемещений на волновом фронте и является следствием первого условия (17).

О п р е д е л е н и е 1. Назовем $\upsilon(x,t)$ – решение (12) для $(x,t) \in R^{N+1}$ *классическим решением* (12), если функция $\upsilon(x,t)$ непрерывна на R^{N+1}, дважды дифференцируема почти всюду на R^{N+1} и имеет ограниченное число волновых фронтов, на которых выполняются условия на скачки (14) – (15).

3. Динамический аналог формулы Сомильяны.

Рассмотрим анизотропную пьезоэлектрическую среду, занимающую область $S^- \in R^N$ с границей S из класса поверхностей Ляпунова с непрерывной внешней нормалью n, $\|n\| = 1$, $(x,t) \in D^-$,

$D^- = S^- \times (0,\infty)$, $D_t^- = S^- \times (0,t)$, $t > 0$,
$D = S \times (0,\infty)$, $D_t = S \times (0,t)$. Обозначим:

при $t = 0$

$$u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- \cup S \qquad (20)$$

$$u_{i,t}(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-$$

для $x \in S$, $t \ge 0$

$$u_i(x,t) = u_i^S(x,t),$$

$$\sigma_{ij}(x,t) n_j(x) = g_i(x,t), \qquad (21)$$

$$D_j n_j = q^S(x,t), \ \varphi(x,t) = \varphi^S(x,t)$$

Требуется по известным начальным и граничным значениям перемещений, поверхностных нагрузок, электрического потенциала, плотности потока заряда восстановить перемещения, напряжения и напряженность электрического поля в среде.

Введем определенные на всем пространстве R^N обобщенные функции

$$\hat{u}_k(x,t) = u_k(x,t) H_D^-(x,t),$$

$$\hat{\varphi}(x,t) = \varphi(x,t) H_D^-(x,t),$$

$$\hat{G}_k(x,t) = G_k(x) H_D^-(x,t),$$

где $H_D^-(x,t) = H_S^-(x) H(t)$, $H_S^-(x)$ – характеристическая функция области S^- [8]. Если граница области S – гладкая с непрерывной нормалью, то $H_S^-(x) = 1/2$ для $x \in S$. $H(t)$ – функция Хевисайда: $H(0) = 1/2$.

Обозначим через $U_i^k(x,t)$ матрицу Грина – решение системы уравнений (12), соответствующее действию сосредоточенной силы

$$\hat{G}_i(x,t) = \delta_{ik}\delta(x,t),$$

где $\delta(x,t)$ – обобщенная дельта–функция, и удовлетворяющее условиям

$$U_i^k(x,0) = 0, \ U_i^k,_t(x,0) = 0, \ x \ne 0.$$

При фиксированном значении k имеет место

$$\left(\delta_{ik}\delta(x,t), \varphi_i(x,t)\right) = \varphi_k(0,0)$$
$$\forall \varphi \in D_M'(R^{N+1}).$$

Введем первообразную матрицы Грина по t:

$$V_i^k(x,t) = U_i^k(x,t) \underset{t}{*} H(t),$$

$$\partial_t V_i^k = U_i^k \qquad (22)$$

Здесь символ "$\underset{t}{*}$" означает неполную свертку по t, которая для регулярной функции имеет вид

$$f(x,t) \underset{t}{*} g(x,t) = H(t)\int_0^t f(x,t-\tau)g(x,\tau)d\tau$$

Первообразная матрицы Грина V_i^k является решением (12) при $\tilde{G}_i = \delta_{ik}\delta(x)H(t)$.

Т е о р е м а 1. *Если классическое решение краевой задачи* $\upsilon(x,t)$ *существует и единственно, то обобщенное решение* $\hat{\upsilon}(x,t)$ *представимо в виде свертки:*

$$\hat{\upsilon}_i(x,t) = U_i^k * \tilde{G}_k + U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^1(x)H_S^-(x) +$$

$$+ \left(U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^0(x)H_S^-(x)\right)_{,t} + U_i^k * p_k\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} * \upsilon_j{,_t}\, n_m\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} \underset{x}{*} \upsilon_j^1(x)n_m\delta_S(x)$$

Здесь $\delta_S(x)$ – сингулярная обобщенная функция – простой слой на S [5], соответственно $p_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$ – простой слой на D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действуя оператором L_{kj} на $\hat{\upsilon}(x,t)$, используя правила дифференцирования обобщенных функций, с учетом равенств [4]:

$$\partial_j H_D^-(x,t) = -n_j\delta_S(x)H(t),$$

$$\partial_t H_D^-(x,t) = \delta(t)H_S^-(x)$$

и условий на фронтах (14) –(15), получим

$$L_{kj}(\partial_x,\partial_t)\hat{\upsilon}_j(x,t) = -\hat{\tilde{G}}_k(x,t) -$$

$$-\rho\upsilon_k^1(x)H_S^-(x) - \rho\upsilon_k^0(x)H_S^-(x) -$$

$$- p_k(x,t)\delta_S(x)H(t) -$$

$$- C_{kj}^{ml}\partial_l\left(\upsilon_j(x,t)n_m\delta_S(x)H(t)\right) = \hat{F}_k(x,t) \quad (23)$$

Свойство матрицы Грина, позволяет построить обобщенное решение (12) в виде свертки

$$\hat{\omega}_i(x,t) = U_i^k * \tilde{G}_k + U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^1(x)H_S^-(x) +$$

$$+ \left(U_i^k \underset{x}{*} \upsilon_k^0(x)H_S^-(x)\right)_{,t} + U_i^k * p_k\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ C_{kj}^{ml}U_i^k * \left(\upsilon_j^S n_m\delta_S(x)H(t)\right)_{,l} \qquad (24)$$

где "$*$" обозначает полную свертку по переменным (x,t):

$$f(x,t) * g(x,t) =$$

$$= H(t)\int_0^t d\tau \int_{R^N} f(x-y,\tau)g(y,t-\tau)dV(y)$$

переменная x под звездочкой соответствует свертке только по x. Последнюю свертку в (24) можно преобразовать, пользуясь правилами дифференцирования сверток и обобщенных функций

$$C_{kj}^{ml}\partial_t V_i^k * \left(\upsilon_j n_m\delta_S(x)H(t)\right)_{,l} =$$

$$= C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} * \left(\upsilon_j n_m\delta_S(x)H(t)\right)_{,t} =$$

$$= C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} * \left(\upsilon_j{,_t}\, n_m\delta_S(x)H(t) +\right.$$

$$\left. + \upsilon_j^0(x)n_m\delta_S(x)\delta(t)\right) =$$

$$= C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} * \upsilon_j{,_t}\, n_m\delta_S(x)H(t) +$$

$$+ C_{kj}^{ml}V_i^k{,_l} \underset{x}{*} \upsilon_j^0(x)n_m\delta_S(x)$$

Подставим это соотношение в (24). В результате получим правую часть (23). Покажем, что (24) является обобщенным решением (12). Действительно, если $U_i^k(x)$ - фундаментальное решение (12), решение для произвольной $\hat{F}_i$ может быть представлено в виде свертки: $\hat{\omega}_j = -U_j^k * \hat{F}_k$. Подставив это в (12), получим

$$L_{ij}\hat{\omega}_j = L_{ij}\left(-U_j^k * \hat{F}_k\right) =$$

$$= -\left(L_{ij}U_j^k\right) * \hat{F}_k = \delta_{ik}\hat{F}_k = \hat{F}_i$$

Поскольку для $\forall\varphi \in D_M(R^{N+1})$

$$\left(\hat{\omega}_i,\varphi_i\right) = \left(-U_i^k * \hat{F}_k,\varphi_i\right) =$$

$$= \left(-U_i^k * L_{kj}\hat{\upsilon}_j,\varphi_i\right) = \left(-L_{kj}U_i^k * \hat{\upsilon}_j,\varphi_i\right) =$$

$$= \left(\delta_{ij}\delta(x,t) * \hat{\upsilon}_j,\varphi_i\right) = \left(\hat{\upsilon}_i,\varphi_i\right)$$

отсюда следует, что $\hat{\omega} = \hat{\upsilon}$ и утверждение теоремы. В силу леммы дю Буа-Реймона [5] ω_i является классическим решением (12).

Полученная формула по известным начальным (20) и граничным (21) значениям восстанавливает решение в области, поэтому ее можно назвать *аналогом формулы Сомильяны* для решений (12). Она является обобщенным решением поставленных задач и может использоваться при $\forall \tilde{\hat{G}}_i$ в том числе и сингулярных, что характерно для физических задач.

Литература: **[1]** ***Кэди У.*** Пьезоэлектричество и его практические применения. М.1949; **[2]** ***Мэзон Ц.*** Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. М.1952; **[3]** ***Martin Kogl*** A boundary Element Method for dynamic Analysis of anisotropic elastic, piezoelectric, and thermoelastic solids. Stuttgart. 2000; **[4]** ***Петрашень Г.И.*** Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.1980; **[5]** ***Владимиров В.С.*** Обобщенные функции в математической физике. М.1976; **[6]** ***Алексеева Л.А.*** ГИУ начально-краевых задач для волнового уравнения// Дифференциальные уравнения.1992.т.28.№8. С.1451-1454; **[7]** ***Алексеева Л.А.*** Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения// Математический журнал. 2006. т.6. №1(19). С.16-32; **[8]** ***Alexeyeva L.A., Zakiryanova G.K.*** Dynamic analogues of Somigliana's formula for unsteady dynamics of elastic media with an arbitrary degree of anisotropy // J. Appl. Maths.& Mech. 1994. Vol.58. No2. PP. 367- 372; **[9]** ***Закирьянова Г.К.*** Регулярное представление формул Кирхгофа и Сомильяны для нестационарной динамики анизотропных сред на контуре// Вестник АН КазССР. 1992. №3. С.79-84.

Принято в печать 20.01.10

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ СОМИЛЬЯНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ПЬЕЗОУПРУГИХ СРЕДАХ

Закирьянова Гульмира Кожахметовна
Институт математики ИМИМ КН МОН РК, г. Алматы
050100, г. Алматы, ул. Пушкина, 125
Институт математики
e-mail: gulmzak@mail.ru, zakir@math.kz, Тел.: 87770258190, Факс: 2723399

ПЬЕЗОСЕРПІМДІ ОРТАЛАР ҮШІН ШЕКТІК ЕСЕПТЕРДІ ШЕШУГЕ АРНАЛҒАН СОМИЛЬЯНА ФОРМУЛАСЫНЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ АНАЛОГЫ

Г.К. Закирьянова
Математика Институты, Қазақстан, Алматы қ.

Пьезосерпімді денелер динамикасына тән гиперболо-эллиптикалық теңдеулер жүйесі қарастырылды. Пьезосерпімді орталар үшін шектік есептерді шешуге арналған Сомильяна формуласының динамикалық аналогы құрастырылды. Бұл формула арқылы есепте берілген бастапқы шарттар және шекаралық белгілері: орын ауыстыру, беттік жүктемелер, электр потенциалы, зарядтың ағынының тығыздығы ортадағы орын ауыстыру, кернеу және электр өрісісінің кернеулігін табуға болады.

DYNAMICAL ANALOGY OF THE SOMIGLIANA’S FORMULA FOR SOLUTION OF NONSTATIONARY BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR PIEZOELASTIC MEDIA

G.K. Zakiryanova
Institute of Mathematics, Kazakhstan, Almaty

Hyperbolic - elliptical systems, which for dynamic of piezoelastic media are typical, are considered. Dynamical analogy of the Somigliana’s formula for solution of nonstationary boundary value problems for piezoelastic media are constructed. This formula allowed to obtained displacements, tensions and electric field intensity if initial values and boundary displacements, surface forces, electric potential, charge flux density are known.