О СОХРАНЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НАМАГНИЧЕННОГО СПУТНИКА ПРИ СМЕЩЕНИИ ЕГО ЦЕНТРА МАСС

Жилисбаева К.С.
ДТОО «Институт космических исследований»
АО «Национальный центр космических исследований и технологий»

Рассматривается возмущенное движение вокруг центра масс намагниченного динамически симметричного спутника в геомагнитном поле с учетом возмущений, вызванных малым смещением центра масс и намагничиванием оболочки спутника. Методом Пуанкаре установлено, что из семейства периодических решений невозмущенной задачи при данных возмущениях рождаются, по крайней мере, два изолированных решения, существующие при достаточно малых ε и аналитически зависящие от этого параметра. При этом одно из них устойчиво по первому приближению, а другое – неустойчиво.

Введение. При движении космического аппарата (КА) в геомагнитном поле естественные силы с течением длительного времени могут снизить угловую скорость собственного вращения КА. Кроме естественных сил, причинами, вызывающими изменение скорости вращения КА могут быть также силы внутреннего трения в элементах аппарата, перемещение членов экипажа, вращение некоторых элементов, раскрытие и закрытие различных панелей и антенн. Вследствие этого происходит незначительное смещение центра масс КА.

В данной работе рассматривается возмущенное движение вокруг центра масс намагниченного динамически симметрич-ного спутника в магнитном поле Земли, моделируемого прямым диполем. В виду сравнительно небольших размеров КА геомагнитное поле можно считать в его окрестности плоскопараллельным. Враща-тельное движение КА определяется в основном взаимодействием его магнитного момента с магнитным полем Земли. Такое взаимодействие обусловлено наличием на борту спутника сильных магнитов. Центр масс спутника движется по круговой орбите в экваториальной плоскости. При исследо-вании движений намагниченного спутника учтены возмущения, вызванные малым смещением центра масс спутника и намагни-чиванием его оболочки.

В рассматриваемом случае напряженность геомагнитного поля направлена по нормали к плоскости орбиты спутника и имеет постоянное значение [1]:

$$\vec{\mathrm{H}} = \frac{\mu_l}{R^3}\vec{z}_{10},$$

где $\vec{z}_{10}$ – орт нормали к плоскости орбиты спутника, μ_l - постоянная земного магнетизма, $\vec{R}$ - радиус-вектор центра масс спутника относительно Земли.

Будем считать, что магнитный момент спутника складывается из постоянной составляющей и магнитного момента оболочки.

$$\vec{\mathrm{I}} = \vec{\mathrm{I}}_0 + \vec{\mathrm{I}}_{\mathrm{H}}$$

Известно [1], что достаточно растянутое симметричное твердое тело в магнитном поле намагничивается в основном по оси симметрии. Предположим, что ось симметрии оболочки спутника совпадает с одной из его главных центральных осей инерции, например, осью z. Тогда магнитный момент оболочки можно записать в виде

$$\vec{I}_{\mathrm{H}} = \frac{\varsigma\beta_3\vec{z}_0}{\mathrm{H}},$$

здесь

$$\varsigma = \frac{(\mu_0 - 1)\nu\mu_l^2}{4\pi R^6}$$

ς - параметр, характеризующий намагничивание оболочки спутника, где μ_0 - относительная магнитная проницаемость, $\vec{z}_0$ - орт оси симметрии спутника, β_3 - направляющий косинус вектора $\vec{z}_{10}$.

Гамильтониан возмущенного движения.

Гамильтониан возмущенного движения в переменных действие-угол $(I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3)$ имеет вид:

$$\mathrm{K}(I, w, \varepsilon) = K_0(I) + \varepsilon K_1(I, w) + \ldots \qquad (1)$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)$, $I = (I_1, I_2, I_3)$, $K_0(I)$ - гамильтониан невозмущенной задачи зависит только от действий I_1, I_2, I_3, $K_1(I, w)$ - пертурбационная функция 2π – периодически зависит от угловых пере-менных I_1 и I_2, $\mathrm{K}(I, w, \varepsilon)$ - гамильтониан возмущенной задачи, ε - малый параметр.

Невозмущенная система канонических уравнений Гамильтона принимает простой вид:

$$\frac{dI_i}{dt} = 0, \quad \frac{dw_i}{dt} = \omega_i(I_1, I_2, I_3)$$

$$\omega_i = \frac{\partial K_0(I_1, I_2, I_3)}{\partial I_i}, \ (i = 1,2,3) \qquad (2)$$

и немедленно интегрируется

$$I_i = I_i^0,$$
$$w_i(t) = \omega_i t + w_i^0, (i = 1,2,3). \qquad (3)$$

Гамильтониан возмущенного движения намагниченного динамически симметричного спутника в переменных действие-угол имеет различный вид в следующих четырех случаях:

I) $I_2 > |I_3|$, II) $I_3 > |I_2|$,

III) $I_2 < -|I_3|$, IV) $I_3 < -|I_2|$.

Следовательно, достаточно рассматривать только первые два случая, а остальные можно получить из первых двух соответствующей заменой знаков переменных действий. В первом случае ($I_2 > |I_3|$) при учете указанных выше возмущений функции $\mathrm{K}_0(I)$ и $\mathrm{K}_1(I, w)$, соответственно имеют вид:

$$\mathrm{K}_0(I) = \frac{(I_1 + I_2)^2}{2B} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right) I_2^2 + m\omega^2 B \frac{I_2 I_3}{2(I_1 + I_2)^2} + \ldots \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_1(I, w) = B\omega^2 \{ &\varepsilon_1 [mB_{-3,1}^{(1)} \sin(w_2 - 3w_1) + (B_{-2,1}^{(0)} + mB_{-2,1}^{(1)}) \sin(w_2 - 2w_1) + \\
&+ (B_{-1,1}^{(0)} + mB_{-1,1}^{(0)}) \sin(w_2 - w_1) + (B_{0,1}^{(0)} + mB_{0,1}^{(1)}) \sin w_2 + \\
&+ mB_{1,1}^{(1)} \sin(w_1 + w_2) + \ldots] + \\
&+ \varepsilon_2 [mB_{-3,1}^{(1)} \cos(w_2 - 3w_1) + \\
&+ (B_{-2,1}^{(0)} + mB_{-2,1}^{(1)}) \cos(w_2 - 2w_1) + \\
&+ (B_{-1,1}^{(0)} + mB_{-1,1}^{(1)}) \cos(w_2 - w_1) + \\
&+ (B_{0,1}^{(0)} + mB_{-0,1}^{(1)}) \cos w_2 + \\
&+ mB_{1,1}^{(1)} \cos(w_1 + w_2)] + \\
&+ \varepsilon_3 [C_{0,0}^{(0)} + mC_{0,0}^{(1)} + (C_{1,0}^{(0)} + \\
&+ mC_{1,0}^{(1)}) \cos w_1 + mC_{2,0}^{(1)} \cos 2w_1] + \\
&+ \varepsilon_4 [D_{0,0}^{(0)} + mD_{0,0}^{(1)} + (D_{1,0}^{(0)} + \\
&+ mD_{1,0}^{(1)}) \cos w_1 + (D_{2,0}^{(0)} + \\
&+ mD_{2,0}^{(1)}) \cos 2w_1 + mD_{3,0}^{(1)} \cos 3w_1] \} + \ldots
\end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь B=A, C – главные моменты инерции спутника, m – безразмерный малый параметр, ω – скорость обращения спутника по орбите, ε_i –малые величины, $B_{i,j}^{(k)}, C_{i,j}^{(k)}, D_{i,j}^{(k)}$ – коэффициенты, зависящие от переменных действия.

Система канонических уравнений с гамильтонианом $\mathrm{K}(I, w, \varepsilon)$ допускает циклический интеграл – интеграл площадей $I_3 = I_{30}$. Тогда рассматриваемую задачу можно свести к системе с двумя степенями свободы. Функция $\mathrm{K}(I, w, \varepsilon)$ является аналитической на множестве $D \times G^2 \times (-\mu, \mu)$, D – связная ограниченная область плоскости $R^2\{I_1, I_2\}$, $T^2\{w_1, w_2 \bmod 2\pi\}$ - двумерный тор с угловыми координатами w_1, w_2, μ>0.

Четырехмерное фазовое пространство $D\times G^2$ невозмущенной системы расслаивается на двумерные инвариантные торы $\{(I,\varphi)$: $I=I_0,\ \varphi\in T^2\}$. Формулы $w_i(t)=\omega_i t+w_i^0,\ (i=1,2)$ задают на этих торах условно-периодические движения с двумя частотами ω_1 и ω_2. Если на инвариантном торе $I=I_0$ частоты соизмеримы (несоизмеримы), то такой тор называется резонансным (нерезонансным).

Существование периодических решений возмущенной задачи.

От автономной системы с двумя степенями свободы в рассматриваемом случае перейдем к неавтономной системе с одной степенью свободы и рассмотрим систему канонических уравнений с гамиль-тонианом

$$\mathrm{K}(I,w,t,\varepsilon)=K_0(I)+\varepsilon K_1(I,w,t)+\ldots, \qquad (6)$$

2π – периодически зависящим от угловой переменной w, ε - малый параметр.

Уравнения движения невозмущенной системы запишем в виде:

$$\frac{dI}{dt}=0\ , \qquad \frac{dw}{dt}=\omega(I), \qquad (7)$$

$$\omega=\frac{\partial K_0(I)}{\partial I}\ ,$$

и получим решение:

$$I=I^0=\text{const},\ w(t)=\omega t+w^0. \qquad (8)$$

Если $\omega(I^0)$ - рациональное число, то тор невозмущенной системы $I=I^0$ сплошь заполнен траекториями периодических решений. Из уравнений

$$\frac{dw}{dt}=\omega(I)\,,\ \ \dot{t}=1,$$

получаем, что инвариантный резонансный тор задается условием:

$$m\omega + n = 0, \quad m, n \in Z, m \neq 0.$$

С помощью метода Пуанкаре [2] решим вопрос о существовании периодических решений возмущенной задачи с гамильто-нианом (6) при достаточно малых ε, анали-тически зависящие от параметра ε, и при ε □ 0, совпадающие с некоторыми периоди-ческими решениями невозмущенной системы (8). Согласно теореме Пуанкаре [2], если выполнены следующие условия:

1) $\dfrac{\partial^2 K_0}{\partial I^2}\neq 0,$ для $I=I_0$,

2) $\dfrac{\partial \overline{K}_1}{\partial \varphi}=0,\ \dfrac{\partial^2 \overline{K}_1}{\partial \varphi^2}\neq 0,$

для некоторых $w=w^0$,

$$\text{где } \overline{K}(I^0,w)=\frac{1}{T}\int_0^T K_1(I^0,\omega t+w)dt,$$

Т – период функции $K_1(I,w,t)$ на инвариантном торе. Тогда при малых ε ≠ 0 существует периодическое решение возму-щенной системы, период которого равен Т. Оно аналитически зависит от параметра ε и при ε □ 0 совпадает с периодическим решением невозмущенной системы

$$I=I^0,\ \ w(t)=\omega t+w^0,\ (i=1,2).$$

При этом характеристические показатели этого решения можно разложить в сходящийся ряд по $\sqrt{\varepsilon}$.

Функции (4) и (5) удовлетворяют всем условиям теоремы Пуанкаре. Аналогичным образом устанавливается, что гамильтониан возмущенной задачи в остальных случаях $(I_3>|I_2|,\ I_2<-|I_3|,\ I_3<-|I_2|)$ также удовлетворяет всем условиям теоремы Пуанкаре. Тогда из теоремы Пуанкаре вытекает, что из семейства периодических решений невозмущенной задачи при выше указанных возмущениях рождаются, по крайней мере, два изолированных решения, существующие при достаточно малых ε и аналитически зависящие от этого параметра. При этом одно из них устойчиво по первому приближению, а другое – неустойчиво

Литература [1]. *Белецкий В. В., Хентов А.А.*. Вращательное движение намагниченного спутника. – М.: Наука, 1980. – 260 с. [**2**]. *Пуанкаре А.* Избранные труды. В 3-х т. – М.: Наука, 1971. Т. 1,2.

Принято в печать 23.03.10

УДК 629.783

О СОХРАНЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ НАМАГНИЧЕННОГО СПУТНИКА ПРИ СМЕЩЕНИИ ЕГО ЦЕНТРА МАСС

Жилисбаева Карлыга Сансызбаевна.
к.ф.-м.н, доцент, заведующая лабораторией небесной механики и динамики космических полетов ДТОО «Институт космических исследований»
АО «Национальный центр космических исследований и технологий»

МАССАЛАР ЦЕНТРІ АУЫТҚЫҒАН МАГНИТТЕЛГЕН СЕРІКТІҢ ПЕРИОДТЫҚ ШЕШІМДЕРІНІҢ САҚТАЛУЫ ТУРАЛЫ

Жилисбаева Қ.С.
ф.-м. ғ.к., доцент,
«Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы» АҚ
«Ғарыштық зерттеулер институты» ЕЖШС
«Аспан механикасы және ғарыштық ұшу динамикасы» лабораториясының меңгерушісі

Геомагниттік өрістегі экваториалдық динамикалық симметриялы серіктің оның массалар центрінің аз ауытқуынан және қабыршағының магниттелуінен туындаған массалар центрінің төңірегіндегі ұйытқыған қозғалысы қарастырылады. Жоғарыда аталған ұйытқулар себебінен ұйытқымаған есептің периодтық шешімдер үйірінен кемінде екі оңаша периодтық шешімдер туындайтыны Пуанкаренің әдісі арқылы айқындалған. Бұл периодтық шешімдер ε параметріне тәуелді және оның жеткілікті аз шамасында бар болады. Осы шешімдердің біреуі бірінші жуықтауда орнықты, ал екіншісі орнықты емес.

ABOUT CONSERVATION OF PERIODIC MOVEMENTS OF THE MAGNETIZED SATELLITE AT DISPLACEMENT ITS CENTER OF MASS

Zhilisbayeva K.S.

The perturbed movement round the centre of mass of the magnetized dynamically symmetric satellite in a geomagnetic field taking into account the perturbations caused by insignificant displacement of the centre of mass and magnetization of a cover of the satellite is considered. By Poincare's method it is established that from family of periodic decisions of not unperturbed problem at above specified perturbations two isolated decisions existing at enough small ε and analytically depending on this parameter are born, at least. Thus one of them is stability on the first approach, and another – is instability.