

ХАОТИЧЕСКИЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В СПЕКТРАХ
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

И.Х.Жарекешев

Людвиг-Максимилиан Университет, Мюнхен, Германия

Email: isa@Physnet.Uni-Hamburg.de, тел. +49 (179) 23925601, Факс +49 (9131) 8271102

Статистика уровней энергии электронов изучена на переходе проводник-изолятор для гиперкубической решетки с пространственной размерностью больше трех. Показано, что распределение уровней отклоняется от теории хаотических матриц по сравнению с трехмерными открытыми системами и стремится к пределу Пуассона для некоррелированных спектров. Используя скейлинг конечного размера, мы вычисляем полную функцию вероятности числа уровней в интервале энергии заданной ширины.

Введение

Статистическое описание электронных спектров на переходе Андерсона является в настоящее время одной из важных задач физики твердого тела и мезоскопических систем. Этот фазовый квантовый переход означает, что существуют три основные фазы: а) металлическая фаза, б) диэлектрическая фаза и в) критическая фаза. Критическая фаза осуществляется точно на границе между металлической и диэлектрической фазой. Она определяется ненулевой величиной беспорядка примесного потенциала, при которой система испытывает вышеуказанный переход (кроссовер) от проводящей фазы к изолирующей. Соответственно, электронные состояния неупорядоченной системы эволюционируют от распространенных состояний к локализованным.

Пространственная размерность d системы играет важную роль при определении критических свойств как проводимости, так и дискретного спектра. Согласно однопараметрической скейлинговой теории локализации [1] все одноэлектронные состояния в одномерных и двумерных системах всегда локализованы даже при сколь угодно малой степени беспорядка, при условии, что симметрия по отношению к обращению времени и по отношению к спиновому вращению сохранена. Следовательно, наинизшей целочисленной размерностью, при которой происходит полный переход металл-изолятор для невзаимодействующих частиц, является три

($d=3$). Многие исследования, по численному моделированию выполненные по транспортным электронным свойствам подтвердили вышеуказанную скейлинговую гипотезу локализации (см. например, [2] и [3] и ссылки в них). Более того, переход металл-изолятор также был обнаружен в следующей высокой размерности, а именно в четырехмерных системах, то есть $d=4$ [4,5]. В этих работах применялся метод трансфер-матриц бесконечной длины для невзаимодействующих электронов.

Статистика энергетических уровней в двух измерениях $d=2$, как известно, не проявляет никакого критического поведения [6,7], в то время, как мы установили в предыдущих разделах, в трехмерных неупорядоченных системах $d=3$ она проявляет критическое поведение. Смотрите также работы [6, 8, 9, 10], которые показали полное согласие с результатами, полученными ранее методом трансфер-матриц [3].

Для трехмерных систем нами была предсказана новая универсальная масштабно-независимая функция распределения между соседними уровнями $P(s)$ при переходе металл-изолятор [6]. Это распределение существенно отличается от результатов «классической» теории хаотических матриц, разработанной Вигнером и Дайсоном [11,12], которая справедлива для слабонеупорядоченных проводников [13,14] Недавно был развит аналитический подход

[15,16], который предполагает, что форма функции $P(s)$ на краю подвижности описывается комбинацией размерности системы d критической экспонентой ν длины локализации. В настоящий момент явное выражение для $P(s)$ интенсивно исследуется для моделей с различной базовой симметрией, а именно для ортогонального [17,18,19], унитарного [20,22] и симплектического [22,23,24] критических ансамблей. В этих трех критических ансамблях значения критического беспорядка и критического индекса известны, поэтому зависимость функции $P(s)$ от критического индекса ν и размерности системы d может быть определена количественно.

Для того чтобы проверить это соотношение в зависимости от размерности d систематически, необходимо идти выше по размерности и подробно изучить также свойства критических параметров и статистики уровней в более высокой пространственной размерности.

В этом работе мы сообщаем о результатах детального численного расчета по статистике уровней на переходе Андерсона, вызванного беспорядком, для следующей после $d=3$ размерности, а именно для четырехмерных систем $d=4$ (гиперкубическая геометрия). Мы показываем, что функция распределения между ближайшими уровнями энергии электрона $P(s)$ проявляет критическое поведение. Ее функциональный вид не зависит от размеров системы (в данном случае гиперкуба) точно на переходе, то есть в критической точке. Причем, она по форме сильно отличается от критической функции распределения $P(s)$ для $d=3$. Используя метод статистики уровней в терминах полной функции вероятности нахождения определенного числа уровней энергии электрона в интервале заданной ширины, мы идентифицировали и исследовали положение перехода проводник-изолятор по степени беспорядка. Она оказалась равной $W_c=34,5\pm 0.1$. Проведя скейлинговый анализ по конечному размеру, нами была найдена одно-

параметрическая скейлинговая функция $f(W/W_c)$ и определена величина критического индекса длины локализации ν . Последняя оказалась несколько меньше, чем величина ν для $d=3$. Сочетая полученные результаты для статистики параметра Меты J_0 [25], определение которого мы приводим ниже, и дисперсии числа уровней в интервале энергии заданной ширины $\langle \delta N^2(E) \rangle$, мы заключаем, что критические спектральные флуктуации в случае $d=4$ являются гораздо сильнее, чем в случае $d=3$. При этом критическая статистика становится более хаотичной и приближается к статистике Пуассона.

1. Модель и численная процедура

Наша модель для четырехмерной неупорядоченной электронной системы определяется гамильтонианом Андерсона

$$H = \sum_n \varepsilon_n c_n^+ c_n + V \sum_{n \neq m} (c_n^+ c_m + c_n c_m^+), \quad (1)$$

где c_n^+ (c_n) является оператором рождения (уничтожения) электрона на узле решетки с номером n ; номер m обозначает узлы гиперрешетки, которые являются ближайшими к узлу n в четырехмерном пространстве. Ясно, что общее их число равно 8 для простой гиперрешетки с $d=4$ (то есть $2d$). Узельные затравочные энергии ε_n хаотично распределены согласно равномерному распределению с шириной W , которая играет роль параметра беспорядка. Второй член в уравнении (1) описывает интеграл перекрытия между ближайшими узлами решетки. Наше рассмотрение ограничено следующим приближением: а) частицы не имеют спина и б) не существует магнитных моментов и магнитного поля. Методом трансфер-матриц [4] ранее была найдена величина критического беспорядка для $d=4$, она равна $W_c=33,2$. Для трехмерных систем критический беспорядок примерно вдвое меньше $W=16.5$ [2].

После численной диагонализации гамильтониана Андерсона (1) с периодическими граничными условиями и применяя метод Ланцоша, мы получили точные дискретные уровни энергии электронов для простой гиперкубической решетки ($d=4$) с размерами, изменяющимися от $L^4=4^4$ до $L^4=10^4$ и различной степени беспорядка, изменяющегося от $W=20$ до $W=50$. Здесь линейные размеры измеряются в единицах постоянной гиперрешетки, а масштабы энергии в единицах интеграла перекрытия V между соседними узлами (т.е. $a=1$ и $V=1$). Дискретные уровни энергии берутся из интервала, центрированного на $E=0$, то есть по центру зоны в модели сильной связи, так что они все принадлежат критической области для равномерного распределения затравочных энергий ϵ_n . Эта критическая область определяется следующим соотношением

$$L < \xi = \left(\frac{|E - E_c|}{E_c} \right)^{-\nu}, \quad (2)$$

где ξ – длина локализации; E_c – край подвижности; ν – критический индекс. Число реализаций из хаотического ансамбля образцов для данного размера системы L выбиралось таким, чтобы полное число собственных значений насчитывало 10^5 событий. Мы проверили, что плотность состояний, определяемая соотношением

$$\rho = \left(\frac{1}{\Delta L^4} \right), \quad (3)$$

где Δ – среднее расстояние между соседними дискретными уровнями энергии электрона в спектре около центра зоны, слегка выравнивалось с энергией. После этого, проводилось аккуратное выравнивание спектра (unfolding) для всех спектров соответствующих разным парам $\{W, L\}$.

2. Критическое распределение $P_c(s)$ расстояний между соседними уровнями энергии

Традиционный путь для изучения статистических свойств хаотических спектров состоит в вычислении распределения расстояний между ближайшими уровнями энергии электрона, которая определяется как плотность вероятности нахождения соседнего уровня в интервале ds , отстоящего на дистанции $s+ds$ от начального уровня, т.е. $P(s) ds$. Известно, что в металлическом режиме функция $P(s)$ очень близка к вигнеровскому предположению (*Wigner surmise* [13]), справедливому для гауссового ортогонального ансамбля (ГОА) хаотических матриц [11], а именно

$$P_{GOE}(s) = \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right), \quad (4)$$

где s измеряется в единицах среднего расстояния Δ между соседними уровнями энергии электрона. В диэлектрической фазе уровни энергии полностью некоррелированы. Их распределение подчиняется закону Пуассона

$$P_p(s) = \exp(-s), \quad (5)$$

Аналогичным образом, как и в трехмерном случае для модели Андерсона [6, 8, 10] возникает третья независимая функция распределения $P_c^{4D}(s)$, причем точно в критической точке перехода металл-изолятор. Как и ожидается, она не зависит от размеров образца и поэтому является масштабно-инвариантной. К тому же, функция $P_c^{4D}(s)$, как универсальная функция, отличается от функций распределения для металлического (формула (4)) и диэлектрического (формула (5)) режимов. Следует также отметить важную особенность $P_c^{4D}(s)$, которая заключается в том, что она отличается от подобной критической функции для трехмерного случая

$$P_c^{4D}(s) \neq P_c^{3D}(s), \quad (6)$$

Для систем конечного размера, ожидается, что статистика уровней плавно меняется от вигнеровского распределения (4) через $P_c(s)$ в направлении пуассоновского закона $P_p(s)$ (формула (5)), когда амплитуда хаотических флуктуаций потенциала увеличивается. Если же увеличивать размер исследуемой системы L , то распределение расстояний между ближайшими уровнями энергии стремится либо к $P_{GOE}(s)$ (формула (4)), либо к $P_p(s)$ (формула (5)) в зависимости от того, ниже или выше степень беспорядка лежит по отношению к своей критической величине W_c^{4D} , соответственно.

На рисунке 1 показаны результаты численного моделирования функции распределения расстояний $P(s)$, вычисленной при степени беспорядка, очень близкой к критической точке. Тот факт, что все данные лежат на одной общей кривой (разумеется, в пределах статистической ошибки) причем независимо от размера гиперсистемы, говорит о том, что $P(s)$ является универсальной. Практически, это и есть определение критической функции распределения $P(s)$ для четырехмерных гиперсистем.

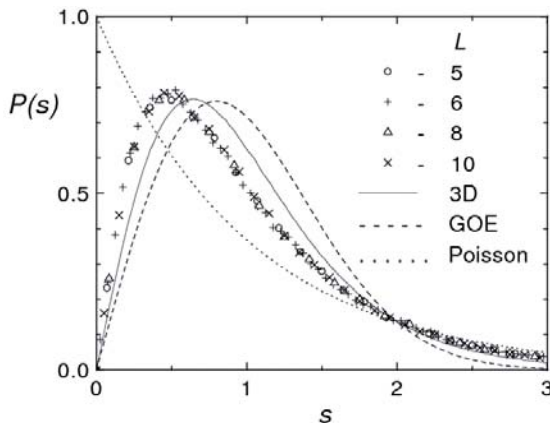


Рис. 1. Функция распределения расстояний между ближайшими соседними уровнями $P_c(s)$ для четырехмерной гиперкубической системы при критической степени беспорядка $W_c=34.5$ для разных размеров решетки $L^4=5^4, 6^4, 8^4, 10^4$. Сплошная линия соответствует трехмерному случаю ($d=3$) взятой из нашей работы [19]. Штриховая линия соответствует формуле (4),

пунктирная линия – закон Пуассона в диэлектрическом режиме, формула (5).

По сравнению со случаем $d=3$ критическая $P(s)$ для $d=4$ находится ближе к закону Пуассона. Стоит отметить также, что наши численные данные значительно отличаются от интерполяционной формулы

$$P_c(s) = Bs \exp\left(-As^{1+1/d}\right), \quad (7)$$

выведенной аналитически в работе [16], где коэффициенты A и B определяются из условий нормировки

$$\int P_s(s) ds = 1, \quad \int P_s(s) s ds = \Delta, \quad (8)$$

При малых скейлингах s мы обнаружили линейное поведение $P_c(s)=Bs$, в полном согласии с ортогональной симметрией. Причем, линейный наклон B почти в два раза больше, чем для гауссового ортогонального ансамбля $B \approx 2.1 B_{GOE}$. С другой стороны, этот коэффициент пропорциональности почти в полтора раза больше, чем для трехмерного случая $B^{4D} \approx 1.4 B^{3D}$ [6]. Это обстоятельство указывает на тот факт, что отталкивание между уровнями становится слабее, что приводит к большей хаотизации спектра с увеличением размерности задач d .

Поведение функции $P_c(s)$ при больших энергиях s хорошо описывается квази-пуассоновской формой

$$P_c(s) \propto s \exp(-As), \quad (9)$$

Где $A=1.4 \pm 0.1$. Здесь также подтверждается факт большей хаотизации, так как в случае $d=3$ скорость экспоненциального спада $A^{3D}=1.9$ быстрее, чем пуассоновский спад $A_p=1.0$ и спад для $d=4$.

Из рисунка 2 можно наблюдать, что $P_c(s)$ изменяется на несколько порядков величины в интервале $2 < s < 10$. Как и ожидалось, асимптотическое спадание происходит медленнее, чем в случае $P_c^{3D}(s)$, которая была определена в работе [19]. Обратим внимание также на тот факт, что на хвосте $P(s)$ численные данные лежат на

одной единственной кривой независимо от размера гиперрешетки, от $L=4$ до $L=10$, что снова подтверждает факт универсальности критической статистики уровней для $d=4$.

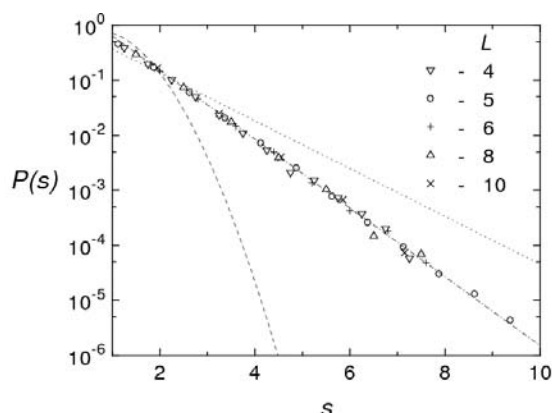


Рис.2. Асимптотический режим критической функции распределения межуровневых расстояний $P_c(s)$ из рис. 1 для разных размеров гиперрешетки L . Штриховая линия соответствует $P_{GOE}(s)$, а пунктирная - закону Пуассона в диэлектрической области. Штрихпунктирная линия $\ln P_c(s)=1.45$, является наилучшей аппроксимацией к численным данным, показанным символами.

3. Полная функция распределения числа уровней $Q_n(s)$

Для того чтобы выполнить скейлинговый анализ по конечному размеру и исследовать, как статистика уровней ведет себя возле критической точки, давайте вычислим зависимость статистики ближайших уровней энергии от величины беспорядка W для разных фиксированных L . Чтобы включить полный диапазон скейлингов, мы используем вероятность распределения нахождения n собственных значений в энергетическом интервале шириной s

$$Q_n(s) \equiv \int_s^\infty I_n(s') ds' = \int_s^\infty ds' \int_{s'}^\infty P_n(s'') ds'', \quad (10)$$

где $I_n(s)$ – киммулятивное распределение n последовательных уровней. Функция $Q_n(s)$ известна для металлического режима из теории хаотических матриц [12]. В диэлектрическом пределе, то есть по обратную сторону перехода проводник-изолятор, полностью

некоррелированным спектром управляет обобщенный процесс Пуассона

$$Q_n(s) = s^n \frac{\exp(-s)}{n!}. \quad (11)$$

В последующей части этого раздела мы изучим вероятность нахождения «никакого» уровня (то есть $n=0$) внутри полосы энергии шириной s . Это означает фактически полную статистику самых ближайших соседей, то есть функцию распределения того, что интервал энергии не содержит ни одного уровня $Q_0(s)$.

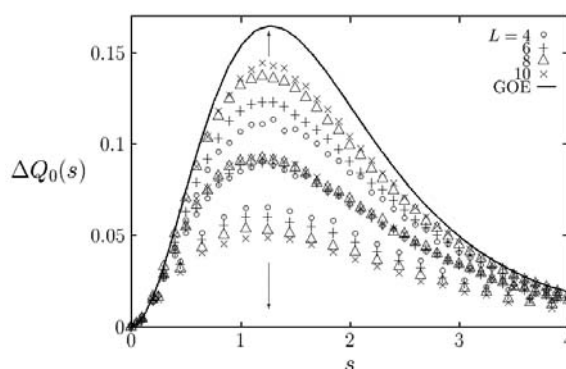


Рис.3. Вероятность распределения $\Delta Q_0(s)$ при трех значениях степени беспорядка $W=20$ (верхний набор), $W=33,2$ (средний набор) и $W=40$ (нижний набор) для разных размеров L четырехмерной гиперкубической решетки. Сплошная линия соответствует результату теории хаотической матриц для гауссового ортогонального ансамбля. Стрелками вверх и вниз показано направление размерного эффекта по обе стороны перехода металл-изолятор.

Для того, чтобы показать зависимость от пары L и W мы изобразили на рисунке 3 график зависимости отклонения вышеуказанной функции от Пуассоновского процесса для $n=0$

$$\Delta Q_n(s) = -[Q_n(s) - \exp(-s)]. \quad (12)$$

Наши результаты для металлической фазы, то есть для степени беспорядка меньше, чем критические величины $W < W_c$ оказались к удивлению ближе к результату

теории хаотических матриц (ГОВА). Чем больше размер системы L , тем ближе критическая четырехмерная статистика к указанному пределу, то есть данные идут вверх. Если же $W > W_c$, в диэлектрической фазе, то наши данные приближаются все ближе к нулевой оси с увеличением размеров системы L , однако с противоположным знаком размерного эффекта, т.е. вниз.

Размерный эффект исчезает только в том случае, если степень беспорядка W равна в точности своей критической величине. Чем ближе к критическому беспорядку, тем больше данных ложатся на одну единственную кривую в пределах статистической ошибки, определяемой размером выборки из ансамбля, и общим числом собственных значений гамильтониана (1), т.е. $\delta \approx 1/\sqrt{N}$.

Таким образом, эта промежуточная кривая, вдоль которой сконцентрированы данные для всех размеров и определяет критическую полную вероятность для ортогональной симметрии. Это и есть убедительная манифестация критического поведения для фазовых переходов. Аналогичная картина наблюдалась также и для случаев $n > 0$ для всех $Q_n(s)$.

4. Спектральный параметр J_0

Чтобы параметризовать полное распределение $Q_n(s)$, рассмотрим статистическую величину, которая носит название параметра Меты [2].

$$J_n \equiv \int_0^\infty Q_n(s) ds. \quad (13)$$

Она принимает во внимание спектральную информацию из всего диапазона изменения спейсингов. Для $n=0$ можно легко показать, что она связана с дисперсией спейсингов $\langle \delta N^2(E) \rangle$

$$J_0 = \frac{1}{2} \langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle \delta^2 s \rangle + 1) \quad (14)$$

Впервые параметр J_0 был введен в нашей работе [17] для исследования критических свойств спектров на переходе Андерсона.

Оказалось, что он является более эффективным по точности и по надежности результатов, получаемых численным путем, чем другие, которые использовались при изучении двумерных и трехмерных систем [6, 8, 10]. Это объясняется тем, что, так как плотность вероятности $P(s) = p_0(s)$ и кумулятивное распределение $I_0(s)$ нормированы на единицу, необходимо выбрать некоторый спейсинг s^* , чтобы вычислить «вес» функции до и после этой точки $I_0(s) = \int_0^{s^*} P(s) ds$ для каждой пары параметров L и W . Это в свою очередь приводит к потере части информации, полученной из диагонализации, и в конечном итоге к уменьшению точности вычислений. Напротив, набор параметров J_n не требует выбора специального s^* , и собранная после диагонализации информация полностью используется. Следовательно, J_n является более успешным для изучения скейлинговых свойств статистики уровней даже с меньшим числом реализаций. Поэтому, с ее помощью переход металл-изолятор определяется более точно. Для ГОВА мы знаем, что [12]

$$J_0 = 0,643, \quad J_1 = 0,922, \quad J_{n \rightarrow \infty} = 1, \quad (15)$$

В локализованном режиме всегда выполняется соотношение $J_n = 1$ для всех n . Для трехмерного случая набор критических J_n^c был вычислен нами в работе [17], например,

$$J_0^c \approx 0,714, \quad \langle s^2 \rangle \approx 1.42. \quad (16)$$

В присутствии сильного спин-орбитального взаимодействия, где переход проводник-изолятор возникает уже при меньшей размерности $d=2$, совершенно другой набор описывает критический симплектический ансамбль. Эти результаты приведены в нашей работе [22].

5. Скейлинг конечного размера и критический индекс

Сейчас мы вычислим зависимость параметра Меты J_o от степени беспорядка W вблизи перехода для различных размеров системы L . Все компьютерные данные лежат внутри интервала между J_o^{GOE} и J_o^P . Они постепенно и непрерывно возрастают от первого предела ко второму при увеличении степени беспорядка. Увеличение J_o эволюционирует быстрее с увеличением размера L . Для бесконечных размеров, то есть в термодинамическом пределе кроссовер между двумя указанными пределами происходит разрывно (т.е. скачком), причем точно в точке перехода металл-изолятор W_c . Можно наблюдать на рисунке 4, что функция $J_o(W)$ проявляет критическое поведение. Общая точка пересечения всех кривых $J_o(W)$ при разных размерах L соответствует $J_o^c \approx 0.79$ (т.е. $\langle s^2 \rangle = 1.57$), где функция $J_o(W)$ не зависит от размера L . Через эту точку размерный эффект на статистику уровней меняет знак, он соответствует переходу проводник-изолятор. Общая точка пересечения кривых $J_o(W)$ для различных размеров L , позволяет определить фиксированную точку перехода более точно $W = W_c = 34.5 \pm 0.5$. Полученное значение критического беспорядка находится в полном согласии со значением W_c вычисленным методом трансфер-матриц [4, 5]. Заметим, однако, что она заметно отличается от линейного соотношения

$$W_c(d) = (d - 2)W_c(d = 3) \quad (17)$$

предложенного в работе [4].

В фиксированной точке перехода длина локализации расходится по следующему алгебраическому закону

$$\xi(W) \propto |W - W_c|^{-\nu} \quad (18)$$

с критической экспонентой ν . Используя члены низшего степенного разложения для функции $J_o(W, L)$ возле фиксированной точки W_c , получаем

$$J_o(W, L) \approx J_o^c + C(W - W_c)L^{1/\nu} = J_o^c + C\left(\frac{L}{\xi}\right)^{1/\nu}, \quad (19)$$

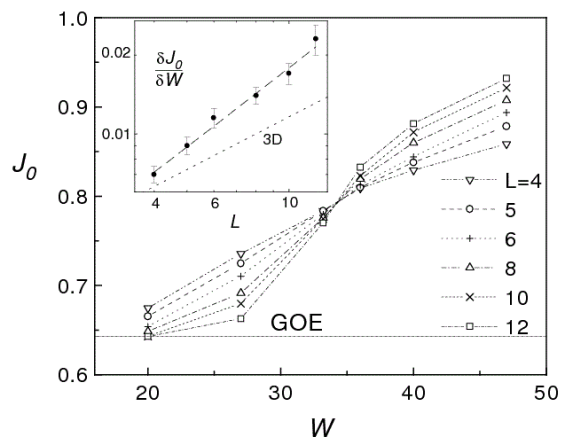


Рис.4. Зависимость параметра Меты J_o от степени беспорядка W для различных размеров L четырехмерной гиперкубической решетки. Горизонтальная линия соответствует результату из теории хаотических матриц $J_o^{GOE} = 0,643$ [12]. На вставке изображена производная dJ_o/dW вблизи критической точки W_c , как функция размера образца L . Линеаризация по методу наименьших квадратов дается штриховой линией. Наклон соответствует критическому индексу $\nu = 1.1$. Для сравнения пунктирной линией показан наклон для трехмерной системы с критическим индексом $\nu = 1.45$ [10].

Можно извлечь критический индекс корреляционной длины. Вставка к рисунку 3 показывает, что данные в пределах ошибки хорошо аппроксимируются линейным соотношением

$$\ln \frac{dJ_o(W, L)}{dW} \propto \nu^{-1} \ln L \quad (20)$$

Оценочная величина $\nu = 1.1 \pm 0.2$ сопоставима с предыдущими результатами вычисления [5]. Она оказалась меньше чем ν для случая $d=3$ ($\nu \approx 1.45$ [10]). С другой стороны, она все же больше результата стандартной теории среднего поля $\nu_{MF} = 1/2$, справедливого для верхней границы размерности d_u , при которой еще возникает переход Андерсона [25]. Основываясь на наших вычислениях, можно заключить, что размерность $d=4$ не является верхней

границы перехода Андерсона. Согласно работе [26] она должна быть равна бесконечности.

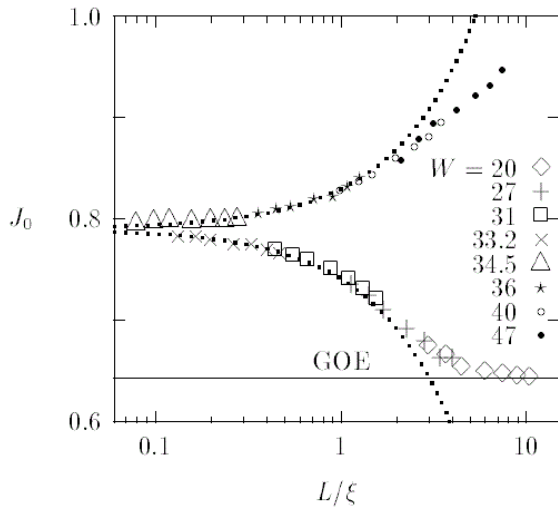


Рис.5. Однопараметрическая скейлинговая зависимость параметра Меты J_0 от L/ξ для разных размеров системы L и разных степеней беспорядка W . Сплошная линия соответствует результату из теории хаотических матриц $J_0=0.643$ [12]. Пунктирная линия соответствует формуле линейаризации (19) с $J_0=0.79$ и коэффициентом $C=0.043$.

Путем введения скейлинговой переменной, которая идентифицируется с корреляционной длиной фазового перехода, можно перестроить точки на графике рисунке 4 таким образом, чтобы все данные легли на однопараметрическую функцию, как показано на рисунке 5. Результирующая кривая $J_0(L/\xi)$ состоит из двух ветвей, характерных для различных сторон перехода металл-диэлектрик. Спадающая ветвь отвечает за металлический режим ($W < W_c$). А возрастающая ветвь отвечает за диэлектрический режим ($W > W_c$). За пределами критической области, то есть когда $L/\xi > 1$ численные данные отклоняются от линейной аппроксимации (19).

Процедура однопараметрического скейлинга конечного размера позволяет найти зависимость корреляционной длины перехода от степени беспорядка W . Вблизи критического беспорядка W_c численные результаты $\xi(W)$ показаны на рисунке 6. Она дает удовлетворительное согласие с формулой (18), в то время как вдали от фиксированной точки наблю-

дается значительное отклонение от формулы (18).

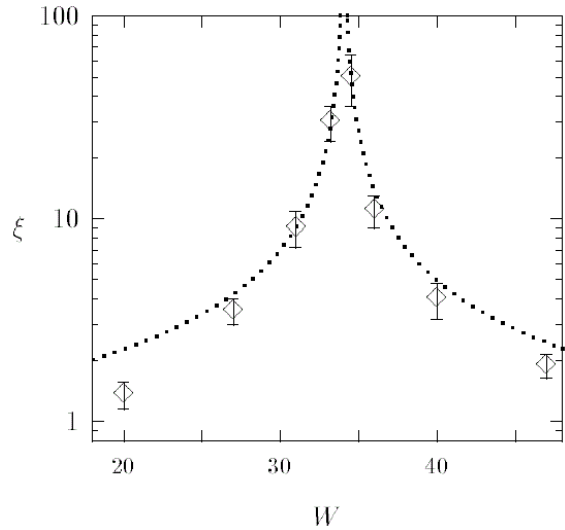


Рис.6. Зависимость корреляционной длины ξ от степени беспорядка примесного потенциала W для четырехмерной гиперсистемы. Пунктирная линия соответствует алгебраическому закону $\xi(W) \propto |W - W_c|^{-\nu}$.

Таким образом, критическое поведение спектральной статистики для четырехмерных систем является типичным для андерсоновского перехода и аналогично переходу в случае $d=3$ [6, 8, 10].

6. Дисперсия числа уровней энергии

В то время как функция распределения расстояний между ближайшими уровнями энергии $P(s)$ и, соответственно, J_0 позволяют исследовать область малых энергий, то дисперсию числа уровней $\langle \delta N^2(E) \rangle$ в заданном интервале шириной E , которая описывает глобальную спектральную жесткость, может обеспечить информацией о флуктуациях на масштабах много больших, чем средний спейсинг Δ . Она определяется как ширина распределения числа уровней N в интервале энергии ширины E

$$\langle \delta^2 N(E) \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} (N - \langle N \rangle)^2 Q_N(E). \quad (21)$$

В глубокой диэлектрической фазе $W \geq W_c$ дисперсия числа уровней подчиняется обычному закону Пуассона

$$\langle \delta^2 N(E) \rangle = \langle N(E) \rangle. \quad (22)$$

Для любой конечной степени беспорядка W собственные функции могут перекрываться в пространстве, таким образом, что флуктуации $\langle \delta N^2 \rangle$ подавляются и становятся меньше пуассоновского предела благодаря явлению отталкивания между уровнями энергии. Когда система является хорошим проводником, то есть $W \leq W_c$ электронные состояния распространены в объеме всего проводника. Следовательно, дисперсия числа уровней для $\langle N \rangle \geq 1$ может быть аппроксимирована формулой Дайсона

$$\langle \delta^2 N \rangle = \frac{2}{\pi^2} \ln \langle N \rangle + \gamma, \quad (23)$$

где $\gamma \approx 0.44$, которая справедлива для гауссового ортогонального ансамбля хаотических матриц [12,13]. Таким образом, относительная флуктуация $\langle \delta N^2 \rangle / \langle N \rangle$ для больших $\langle N \rangle$, которая известна как спектральная сжимаемость K , изменяется от нуля до единицы, когда степень беспорядка W растет. Особенный интерес вызывает вопрос: как ведет себя относительная флуктуация точно в критической точке перехода, когда $W = W_c$. Например, для трехмерных систем было численно показано, что ее критическая величина равна константе $K_c \approx 0.27$ [17]. Возможно, имело бы смысл подробно рассмотреть дисперсию числа уровней для слабо неупорядоченной четырехмерной системы, для того чтобы сравнить ее с результатами диффузионной теории [14].

Рисунок 7 демонстрирует численные результаты по относительной дисперсии числа уровня возле фазового перехода. Зависимость от размера системы выше и ниже критической точки перехода, в принципе, весьма сходна с картиной скейлинга для $\Delta Q_0(s)$, изображенного на рисунке 3. С увеличением размера L

численные данные приближаются к дайсонов-ской дисперсии – формуле (23), если $W < W_c$, в то время как K стремится к единице, если $W > W_c$, соответственно.

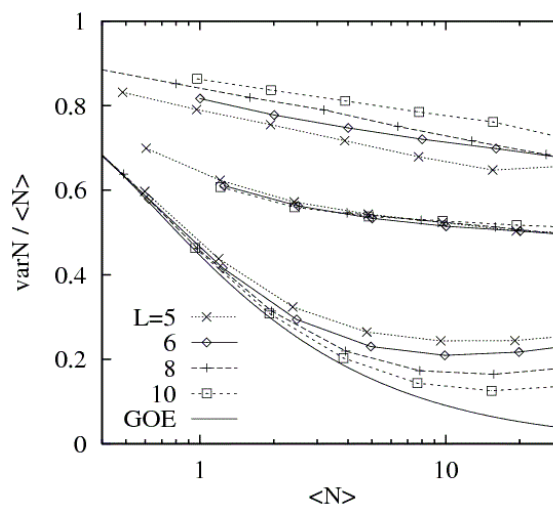


Рис.7. Относительная дисперсия числа уровней $\langle \delta N^2 \rangle / \langle N \rangle$ дискретного спектра электронов как функция среднего числа уровней в интервале энергии заданной ширины $\langle N(E) \rangle$ для различных размеров L гиперкубической решетки при трех значениях степени беспорядка $W=20$ (нижний набор), $W=34.5$ (средний набор) и $W=47$ (верхний набор). Сплошная линия соответствует формуле Дайсона (23). Насыщение наступает согласно формуле (25).

Точно при $W = W_c = 34.5$ отношение почти не чувствительно к изменению размера системы L . Этот факт подтверждает повторно существование промежуточной размерно-независимой статистики для длинно- масштабных корреляций $s \geq \Delta$. Коротко-масштабные корреляции $s \sim \Delta$, как уже указывалось ранее в предыдущих подразделах, хорошо описываются функцией распределения межуровневых расстояний $P(s)$. Интересно отметить, что отношение $\langle \delta N^2 \rangle / \langle N \rangle$ при переходе металл-диэлектрик уменьшается очень медленно с увеличением среднего числа уровней $\langle N \rangle$.

Авторами работы [27] был предложен аналитический подход, который доказывает, что сжимаемость спектра на краю подвиж-

ности полностью характеризуется мультифрактальными свойствами критических волновых состояний электрона. Причем она может быть определена в терминах мультифрактальной размерности

$$\mu = d - D_2. \quad (24)$$

При этом сжимаемость равна

$$K_c = \lim_{\langle N \rangle \rightarrow \infty} \frac{d \langle \delta^2 N \rangle}{\langle \delta N \rangle} = \frac{\mu}{2d} < \frac{1}{2}. \quad (25)$$

Наши результаты вычисления размерности μ и критической сжимаемости K_c до сих пор удовлетворяли этому соотношению для размерности $d \leq 3$. Однако, для четырехмерных систем для достаточно больших средних чисел $\langle N \rangle \geq 20$ результаты едва удовлетворяют верхнему теоретическому пределу и идут все же ниже

$$K_c \approx 0.45 \pm 0.05. \quad (26)$$

Эта величина больше, чем в трехмерном случае, указывая на то, что спектральная жесткость уменьшается с увеличением размерности системы d . Отметим, что пуассоновский процесс никакой жесткостью не обладает ($K_p \equiv 1$). Однако, точность по $\langle \delta N^2 \rangle$ все же не так высока, чтобы достичь, точный предел насыщения при $\langle N \rangle \geq 1$ и, как следствие, обеспечить желаемую и надежную оценку для мультифрактальной размерности μ из формулы (25). Кроме того, независимый компьютерный анализ мультифрактальных свойств, критических собственных функций электрона на переходе проводник-изолятор в четырехмерных системах все еще необходим, что возможно составит задачу для будущих исследований.

7. Заключение

Методом численного моделирования мы вычислили критическое распределение межуровневых расстояний $P(s)$ на переходе металл-изолятор для четырехмерной андерсоновской модели. Показано, что вызванный увеличением беспорядка кроссовер

между вигнеровской и пуассоновской статистикой для конечных систем подчиняется закону однопараметрического скейлинга, аналогично тому, который верен для более низких размерностей. Скейлинговый анализ конечного размера, выполненный для статистики уровней энергии позволяет идентифицировать значение критической степени беспорядка $W_c = 34.5$ и определить с высокой точностью критический индекс ν корреляционной длины фазового перехода. Сравнивая полученные результаты с результатами для более низких измерений $d < 4$, мы приходим к выводу, что спектральные корреляции в критической точке зависят от пространственной размерности d , причем с увеличением d они становятся слабее, уступая место нарастающей хаотизации спектра.

Таким образом, статистика уровней с увеличением размерности изучаемой системы *эволюционирует от порядка к критичности, а затем от критичности к хаосу*. Для систем с бесконечной размерностью, которые описываются теорией среднего поля (mean-field approximation) предполагается полный хаос в электронных спектрах.

Необходимо дальнейшее систематическое изучение зависимости критической статистики уровней при высокой пространственной размерности, для того чтобы ответить на вопрос, как критическая статистика приближается к пределу Пуассона, когда достигается верхняя критическая граница по d андерсоновского перехода [26]. Другой причиной для продолжения исследований высоко-размерных систем $d > 3$ может служить проверка непертурбативной теории для спектральных флуктуаций в слабо неупорядоченных металлических образцах.

Inc., New York, 2004, p. 149-162; [8] Еганова И.А., Самойлов В.Н., В. Каллис, Струминский В.И., Ханейчук В.И. Бабин А.Н. Геофизический мониторинг Дубна-Научный-Новосибирск: природа явления Херста и затмение Солнца 1 августа 2008 г. // Сообщение Объединенного института ядерных исследований, P18-2009-75. Дубна, 2009 – 49 с.; [9] Еганова И.А., Самойлов В.Н., Струминский В.И., Каллис В. Масса (вес) как объект долговременных наблюдений в гравитационных исследованиях. Ч. 1. Проблемы теории гравитации и динамика массы // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев, В.Н. Самойлов. Новосибирск: Академическое изд-во “Гео”, 2008 – с. 165-183; [10] Еганова И.А., Клещев А.Г., Струминский В.И. К проблеме геофизического мониторинга: масса кристаллов и минеральных агрегатов // Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев, В.Н. Самойлов. Новосибирск: Академическое изд-во “Гео”, 2006 – с. 107-123; [11] Lavrent'ev M.M. and Eganova I.A. Kozyrev's method of astronomical observations: information from true positions of stars, stellar systems, and planets // Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics: “Pro” and “Contra” / Eds. A.E. Chubykalo, V.Pope, R.Smirnov-Rueda. Nova Science Publishers, Inc., New York, 1999 Поиск математических закономерностей Мироздания: физические идеи, подходы, концепции / Ред. М.М. Лаврентьев, В.Н. Самойлов. Новосибирск: Академическое изд-во “Гео”, 2008 – с. 165-183; р. 100-115; [12] Лозунов А.А., Мествиришвили М.А. Релятивистская теория гравитации. М.:Наука, 1989 – 304 с.

Принято в печать 7.12.09

УДК 501

**ПРИЧИННАЯ ИЛИ НЕОБРАТИМАЯ МЕХАНИКА:
НОВЫЙ ВЗГЛЯД НА ОТКРЫТОСТЬ СИСТЕМ**

Ирина Аршавировна Еганова

Россия, г. Новосибирск, Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН, 630090

E-mail: eganova@math.nsc.ru

**CAUSAL OR ASYMMETRICAL MECHANICS: A NEW VIEW OF THE SYSTEMS OPEN-
NESS**

Irina Arshavirovna Eganova

Russia, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics SD RAS, 630090

E-mail: eganova@math.nsc.ru

Causal or asymmetrical mechanics ideology which discovered unknown possibilities for the complex systems interconnection– through irreversible processes is discussed.

КОМЕНТАРИЙ

Хотелось бы пояснить некоторые аспекты данной работы. Поскольку весь мир проецируется на ось времени как одна точка, это означает, что пространственный аспект не имеет протяженности для временного аспекта – время “пронизывает” все пространство “сразу”, оно не “распространяется”, поэтому взаимосвязи во временном аспекте должны быть дистанционными (во времени нет распространения!) и мгновенны (им соответствует нулевой интервал собственного времени, эта взаимосвязь обусловлена метрикой пространства-времени, или наоборот). Не исключено, что “источником” воздействия по этому “каналу” связи выступают внешние необратимые процессы, “приемником” являются сложные системы любого происхождения – внешние необратимые процессы инициируют в них изменение состояния вещества, вплоть до изменения хода протекающих в нем процессов. Таким образом, Козырев задолго до известных работ И. Пригожина предсказал и обнаружил “конструктивную роль” необратимых процессов в возникновении, существовании и развитии сложных систем, вышел за пределы консервативной физики. Но, по мнению физиков традиционных школ, наблюдаемые Козыревым явления не вписываются в картину современной физики, которую они, видимо, приняли весьма формально. Поэтому его достижения игнорировались, замалчивались и искажались в интересах этих школ – в ходе козыревского анализа огромного наблюдательного материала астрофизики была

вскрыта несостоятельность их астрофизических моделей. При этом каких-либо серьезных возражений не выдвигалось, а после того, как известному астрофизику Д. Койперу, поспешившему голословно обвинить Козырева в фальсификации, пришлось публично принести свои извинения, публикации Козырева игнорировали, отказываясь обсуждать его результаты. Однако Козырева активно поддержали авторитетные ученые с мировым признанием: академики Амбарцумян, Александров А.Д., Боголюбов, Понтрягин, Седов.

Хотя результаты Козырева на первый взгляд шокируют своей необычностью, с нашей точки зрения они объективны. Только необходимо знакомиться с его трудами серьезно, последовательно и целиком – идти по его следам, внимательно фиксируя развитие его теоретических построений, в которых он всегда ориентировался на дальнейшую проверку экспериментальным материалом. Надо иметь в виду, что для вопросов, которые поднимал Козырев, в теории не было готовых “шаблонов” для их разрешения, так что ему приходилось разрабатывать новые подходы, но его стратегия всегда опиралась на бесспорные физические представления и законы, никогда и ни в чем им не противоречила.

Известный физик-теоретик XX века Дж. Л. Синг, который вслед за Козыревым провозгласил фундаментальную роль понятия времени в физике и настаивал, что из всех физических измерений самым фундаментальным является измерение времени, что *“Евклид направил нас по ложному пути, когда мы полагаем пространство первым, а время вторым – очень невзрачным вторым”*, подчеркивал, что в физике есть много вещей, которые выглядят просто, если смотреть на них с правильной позиции, но которые ужасно запутают вас, если вы стоите на ошибочной позиции. Так и с результатами Козырева: если вырывать их из контекста козыревской концепции времени и воспринимать их через призму собственных представлений, где физическая реальность рисуется *«чисто пространственной»*, а время – только математический параметр (фактически вопреки сущности пространства-времени – современной математической модели физической реальности!), то, конечно же, с такой позиции объективное их восприятие просто не возможно.

Таким образом, ни в коем случае нельзя отбрасывать полученный Козыревым и его сподвижниками важнейший экспериментальный материал лишь потому, что он не укладывается в прокрустово ложе догматически усвоенной физической картины мира, или не соответствует идеям современных “законодателей” физики. В истории физики накопилось множество примеров, когда подобным образом научный прогресс отбрасывался на многие столетия. Ярким примером является известная история с геоцентрической моделью Вселенной Птолемея. С нашей точки зрения, глубокие идеи Козырева, обнаруженные им эффекты и закономерности, требуют к себе очень серьезного внимания, так как они прокладывают путь в физику эволюции нашего мира.

В.М. Сомсиков

References: [1] *Abrahams E., Anderson P.W., Licciardello D.C., Ramakrishnan T.V.* // *Phys.Rev. Lett.* – 1979. – V. 42, – P. 673; [2] *MacKinnon, Kramer B.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1981. – V. 47. – P. 1546; [3] *Kramer B., MacKinnon,* // *Rep. Prog. Phys.* – 1993. – V. 56. – P. 1496; [4] *Markos P., Henneke M.* // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 1994. – V. 6. – L. 765; [5] *Schreiber M. and Grussbach H.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – V. 76. – P. 1687; [6] *Shklovskii B.I., Shapiro B., Sears B. R., Lamdrianides P., Shore H.B.* // *Phys. Rev.*– 1993. – V. 47. – P. 11487; [7] *Zharekeshev I. Kh., Batsch M., Kramer B.* // *Europhys. Lett.* – 1996. – V. 34. – P. 587; [8] *Hofstetter E., Schreiber M.* // *Phys. Rev.* – 1994. – V. 49. – P. 14726; [9] *Evangelou S. N.* // *Phys. Rev.* – 1994. – V. 49. – P. 16805; [10] *Zharekeshev I. Kh., Kramer B.* // *Phys. Rev.* – 1995. – V. 51. – P. 17239; [11] *Wigner E.P.* // *Ann Math.* – 1955. – V. 62. – P. 548; – 1957. – V. 65. – P. 203; [12] *Mehta M. L.* // *Random Matrices.* – Academic Press. Boston. – 1991; [13] *Efetov K. B.* // *Adv. Phys.* – 1983. – V. 32. – P. 53; [14] *Altshuler B. L., Shklovskii B. I.* // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1986. – V. 91. – P. 220. // *Sov. Phys. JETP.* – 1986. – V.6. – P. 127; [15] *Aronov A. G., Kravtsov V. E., Lerner I. V.* // *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1994. – V.59. – P. 39. // *JETP Lett.* – 1994. – V. 59. – P. 40; [16] *Kravtsov V. E., Lerner I. V., Altshuler B. L., Aronov A. G.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – V. 72. – P. 888; [17] *Zharekeshev I. Kh., Kramer B.* // *Jpn. J. Appl. Phys.*–1995. – V. 34. – P. 4361; [18] *Varga I., Hofstetter E., Schreiber M., Pipek J.* // *Phys. Rev.* – 1995. – V. 52. – P. 7783; [19] *Zharekeshev I. Kh., Kramer B.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1997. – V. 79. – P. 717; [20] *Hofstetter E., Schreiber M.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – V. 73. – P. 3137; [21] *Batsch M., Schweitzer L., Zharekeshev I. Kh., Kramer B.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – V. 77. – P. 1552; [22] *Schweitzer L., Zharekeshev I. Kh.* // *J. Phys.: Condens. Matter.* – 1995. – V. 7. – L. 377; – 1997. – V. 9. – L. 441; [23] *Evangelou S. N.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – V. 75. – P. 2550; [24] *Kawarabayashi T., Ohtsuki T., Slevin K., Ono Y.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1996. – V. – 77. – P. 3593; [25] *Efetov K. B.* // *Physica (Amsterdam).* – 1990. – V. 167 A. – P. 119; [26] *Mirlin A. D., Fyodorov Y. V.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1994. – V. 72. – P. 526; [27] *Chalker J. T., Kravtsov V. E., V. Lerner I.* // *JETP/ Lett.* – 1996. – V. 64. – P. 386; [28] *Agam O., Altshuler B. L., Andreev A. V.* // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. – V. 75. – P. 4389.

Принято в печать 11.04.10

УДК 538.9, 539.21:537.1

**ЖОГАРЫ КӨЛЕМДІ РЕТТЕЛМЕГЕН ЖҮЙЕЛЕР ЭЛЕКТРОНДЫҚ СПЕКТРЛАРЫНДАҒЫ
ХАОТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ КРИТИКАЛЫҚ ФЛУКТУАЦИЯЛАР**

Иса Хасенұлы Жарекешев

Мюнхен Людвиг-Максимилиан Университеті, Германия

Email: isa@physnet.uni-hamburg.de, тел. +49 (179) 23925601, Факс +49 (9131) 8271102

Электрондардың энергия деңгейлерінің көлемі үштен асатын гиперкубтық елегінің өткізгіш-изоляцияға ауысқандағы статистикасы зерттелген. Деңгейлердің бөлінуінің үшөлшемді жүйелермен салыстырғанда хаотикалық матрицалар теориясынан ауытқитындығы және реттелмеген спектрлардағы Пуассонның шектеулеріне жуықтайтындығы көрсетілген. Соңғы көлемді скейлингті пайдалана отырып, энергияның берілген деңгейлер саны мүмкіндігінің толық функциясы есептеп шығарылған.

**CHAOTIC AND CRITICAL FLUCTUATIONS IN SPECTRA
OF DISORDERED SYSTEMS AT HIGHER DIMENSIONS**

I.Kh. Zharekeshev

Ludwig-Maximilian University of Munich, Germany

Email: isa@physnet.uni-hamburg.de, Tel. +49 (179) 23925601, Fax +49 (9131) 8271102

The statistics of electron energy levels at the metal-insulator transition for hypercubic lattices with spatial dimensionality higher than 3 is investigated. The energy level distribution is shown to deviate from the results of the random-matrix theory in comparison with three-dimensional systems and tends towards Poisson limit for uncorrelated spectra. By applying the finite size scaling scenario, we calculate the full probability function of the level number in the energy interval of a given width.

Keywords: quantum localization, critical phenomena, phase transition, metal-insulator transition, level statistics

**ХАОТИЧЕСКИЕ И КРИТИЧЕСКИЕ ФЛУКТУАЦИИ В СПЕКТРАХ
НЕУПОРЯДОЧЕННЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

Иса Хасенович Жарекешев

Людвиг-Максимилиан Университет, Мюнхен, Германия

Email: isa@physnet.uni-hamburg.de, Tel. +49 (179) 23925601, Fax +49 (9131) 8271102