УДК 517.95

Л.А. Алексеева, Г. Н. Азиз
Институт математики и математического моделирования
ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан, alexeeva@math.kz;
Казахский Национальный Университет им. аль–Фараби,
пр.аль-Фараби,71, Алматы, 050038, Казахстан, azizgulfariza@gmail.com

МОДИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА ОСНОВЕ ЕЕ БИКВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЫ. УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Аннотация. С использованием дифференциальной алгебры бикватернионов рассмотрена система уравнений Максвелла, ее гамильтонова и бикватернионная формы. С введением скалярного α–поля в бикватернион напряженности ЭМ-поля построены модифици-рованные бикватернионная форма, гамильтонова форма и связанная система модифицированных уравнений Максвелла гиперболического типа. Рассмотрены ударные электромагнитные волны как обобщенные решения биволновых уравнений, к которым принадлежит биформа уравнений Максвелла. Построены условия на скачки векторов напряженности ЭМ-поля на фронтах ударных волн. Показано, что ударные электромагнитные волны модифицированных уравнений содержат продольную составляющую напряженностей на фронтах, что подтверждается многочисленными экспериментальными наблюдениями, широко обсуждаемыми в настоящее время.

Ключевые слова: бикватернион, уравнения максвелла, модифицированная система, ударные волны.

Введение

Процессы распространения электро-магнитных волн в средах описываются уравнениями Максвелла (УМ), которые составляют теоретическую основу современной электродинамики. Система уравнений Максвелла состоит из двух векторных и двух скалярных дифферен-циальных уравнений, связывающих вектора электрической и магнитной напряженности с плотностями электри-ческих токов и зарядов. УМ позволяют при известном электромагнитном(ЭМ) поле определять порождающее его электрические заряды и токи. И обратно, при заданных токах и зарядах находить напряженности ЭМ-поля. При этом два векторных уравнения для роторов напряженностей ЭМ-поля представляют замкнутую систему из 6 уравнений *гиперболического типа*, достаточную для определения поля при известных электрических токах. Эти два уравнения широко используются для решения разнообразных динамических задач электродинамики, наиболее подробно это изложено в [1-3].

Два скалярных уравнения Максвелла для дивергенции напряженностей по сути являются определением плотности электрического и магнитного заряда, посту-лирующим, в частности, соленоидальность магнитных полей и, как следствие, отсутствие в природе магнитных зарядов. Первое уравнение используется в электростатике для определения потенци-альных электрических полей, порождаемых заданными электрическими зарядами. В частности, его следствие – это *эллип-тическое* уравнение для кулоновского потенциала электрического поля, которое имеет вид уравнения Пуассона. Время в него входит параметрически как один из аргументов плотности заряда, что физически влечет за собой изменение ЭМ-поля при изменении плотности заряда совсем не волновой природы. Это противоречит наблюдаемым процессам формирования и распространения ЭМ-полей. К сожалению, в классической литературе по электродина-мике это практически не обсуждается, т.к. кулоновское уравнение используется обычно только для статических электрических зарядов.

Следствием уравнений Максвелла является также *поперечность* электромагнитных волн. Так для радиоволн фиксированной длины (частоты) в любом учебнике по электродинамике показывается ортогональность тройки векторов электри-ческой, магнитной напряженности и волно-вого вектора к фазовой поверхности ЭМ-волны. Для ударных электромагнитных волн доказательство этого свойства и условия на скачки на их фронтах изложены в [4].

Особенности уравнений Максвелла позволяют записать их в комплексной форме, которую называют *гамильтоновой формой* уравнений Максвелла, что в два раза уменьшает число уравнений (одно векторное и одно скалярное) и существенно упрощает процесс построения их решений [5]. Однако использование алгебры гиперкомплексных чисел, позволяет эту систему из 8 дифференциальных уравнений записать в виде лишь одного дифференци-ального уравнения[6].

Эта особенность УМ замечена давно и имеет обширную библиографию. Интересно, что сам Максвелл, при изучении опытов Фарадея, для их математического описания использовал уже известную в то время алгебру кватернионов, которая предшест-вовала матричной алгебре. Однако успехи последней остановили применение алгебр гиперкомплексных чисел в задачах математической физики, и только в последние два десятилетия эти алгебры стали все шире применяться для решения различных физических задач.

Здесь используется алгебра бикатернионов для исследования уравнений Максвелла. Бикватернионная форма УМ относится к классу наиболее простых бикватернионных волновых (*биволновых*) уравнений, которые легко исследовать. При этом скалярная часть соответствующего бикватерниона напряженности ЭМ-поля равна **нулю**. Это свойство обуславливает все выше перечисленные свойства уравнений Максвелла. Однако естественное обобщение этой *биформы* введением скалярногоα-поля в скалярную часть бикватерниона напряженности позволяет показать, что заряды и токи являются физическим проявлением бикватернионных градиентов (*биградиентов*) напряженности ЭМ-полей. А из этой биформы следует *модифицированная система УМ*, которая объединяет скалярные и векторные уравнения в единую гиперболическую систему уравнений. Здесь также показано, что ударные ЭМ-волны для этих уравнений имеют продольную составляющую, связанную со скачком α-поля. Это подтверждает существующие наблюдения продольных ЭМ-волнв экспериментах, которые уже давно и достаточно широко обсуждаются в специальной литературе [8].

Уравнения Максвелла и их свойства.

Уравнения Максвелла для однородной изотропной электромагнитной (ЭМ) среды представляют собой систему дифференциальных уравнений, связывающих между собой *плотность электрического заряда*$\rho^E(x,t)$,*плотность электрического тока*$j^E(x,t)$с порождаемыми ими ЭМ-полем.

ЭМ-поле описывается вектором *электрической и магнитной напряженности* $E(x,t), H(x,t)$, которые связаны системой из 8 уравнений:

$$\begin{aligned} &rotH=\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}+j^E(x,t)\ ,\\ &rotE=-\mu\frac{\partial H}{\partial t}\\ &\varepsilon divE=\rho^E(x,t),\\ &divH=0\end{aligned} \qquad (1)$$

гдеε,μ – константы, характеризующие электрическую проводимость и магнитную проницаемость среды, t – время, x– точка евклидова пространстваR^3 с декартовыми координатами$x(x_1, x_2, x_3)$.Здесь первые два уравнения – векторные, а два другие – скалярные.

Из $(1)_3$ следует, что дивергенция электрического поля физически проявляется через электрические заряды. По аналогии дивергенция магнитного поля должна проявляться через магнитный заряд. Однако, в силу $(1)_4$, он равен нулю. Что служит теоретическим обоснованием отсут-ствия магнитных зарядов в природе и утверждения о соленоидальности магнитно-го поля H.

Если взять дивергенцию у первого уравнения, то получим *закон сохранения электрического заряда*

$$\frac{\partial \rho^E}{\partial t} + divj^E = 0 \quad (2)$$

Дивергенция второго уравнения, с учетом $(1)_4$, дает тождество: 0=0.Если взять ротор у первых двух векторных уравнений, то получим волновые уравнения:

$$\Box_c H = rotj^E \quad (3)$$

$$\Box_c E = -\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\rho^E - \mu\frac{\partial j^E}{\partial t} \quad (4)$$

где $\Box_c$-волновой оператор (*даламбертиан*):

$$\Box_c = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta,$$

скорость распространения ЭМ-волн

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Уравнения (3), (4) позволяют находить E и H, если известны электрические токи.

Для построения решений системы УМ ее симметризуют условным введением магнитного заряда$\rho^H(x,t)$имагнитного тока$j^H(x,t)$. Тогда УМ приобретают вид: *симметризованная система УМ*

$$\begin{aligned} -\varepsilon\partial_t E + rotH &= j^E(x,t),\\ \mu\partial_t H + rotE &= j^H(x,t),\\ \varepsilon divE &= \rho^E(x,t),\\ -\mu divH &= \rho^H(x,t) \end{aligned} \quad (5)$$

Легко видеть, что замена E на H, H на E, а εна $-\mu$ иμ на - ε сохраняет ее вид.Эта система более удобна для построения решений.

Первые два векторных уравнения (5)представляют собой замкнутую систему уравнений гиперболического типа, которая позволяет по заданным электрическим и магнитным токам определять напряженности ЭМ-поля E, H.

Используя фундаментальные решения этой системы уравнений можно строить их частные классические и обобщенные решения при различных токах (см.[1]).Эта система эквивалентна уравнениям Максвелла (1) при условии

$$\rho^H = 0, j^H = 0. \quad (6)$$

Заметим, что система уравнений Максвелла *не связана*. Первые два векторных уравнения позволяют найти напряженности ЭМ-поля при заданных токах. Для этого не нужны скалярные уравнения для зарядов. После определения E и H можно найти электрические заряды, используя два скалярных уравнения $(1)_3$ и $(1)_4$. (для (5) -- $(5)_3$ и $(5)_4$).

Обратно, если известны E,H ЭМ-поля, уравнения Максвелла (1) или (5)дают возможность находить соответствующие заряды и токи.

Гамильтонова форма уравнений Максвелла

Систему уравнений Максвелла для ЭМ-поля можно комплексифицировать и записать в виде двух дифференциальных уравнений, на пространстве Минковского $\mathbb{M} = \{(\tau, x): (\tau = ct,\ x = (x_1, x_2, x_3)\}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \partial_\tau A + irotA + J = 0,\\ \rho = divA \end{aligned} \quad (7)$$

где A- комплексный вектор напряженности ЭМ-поля:

$$A = A^E + iA^H = \sqrt{\varepsilon}E + i\sqrt{\mu}H \quad (8)$$

J- ток определяется через электрические и магнитные токи формулой:

$$J = \sqrt{\mu}j^E - i\sqrt{\varepsilon}j^H,$$
$$\rho = \frac{\rho^E}{\sqrt{\varepsilon}} - i\frac{\rho^H}{\sqrt{\mu}} \qquad (9)$$

Плотность энергииW и *вектор Пойнтинга* P ЭМ-поля определяются формулами:

$$W = \frac{1}{2}(\varepsilon\|E\|^2 + \mu\|H\|^2) = \\ = 0{,}5\|A\|^2 = (A, \bar{A}) \qquad (10)$$

$$P = c^{-1}[E, H] = 0{,}5i[A, \bar{A}]$$

Здесь и далее (a,b), [a,b] – скалярное и векторное произведение векторов a,b, черточка над вектор-функцией и скаляром означает комплексное сопряжение.

Поскольку квадрат размерности этого поля равен плотности энергии, А-поле можно назвать *энергетическим.*

Если взять ротор от векторного уравнения, получим волновое уравнение для А:

$$\Box_c A = irotJ - \mathrm{grad}\rho - \partial_\tau J \qquad (11)$$

Его дивергенция, с учетом $(7)_2$ дает закон сохранения электромагнитного заряда:

$$\partial_\tau \rho + divJ = 0 \qquad (12)$$

О построении обобщенных решений гамильтоновой формы уравнений Максвелла (7) см. [5].

Бикватернионная форма уравнений Максвелла

Систему уравнения Максвелла можно записать еще в более короткой форме, очень удобной для построения ее решений. Для этого используются алгебры кватернионов и бикватернионов.По этому поводу существует обширная библиография. Здесь дадим ее представление, следуя [6].Для этого дадим несколько определений.

Введем функциональное пространство бикватернионов на пространстве Минковского $\mathbb{M}$. Это пространство комплексных кватернионов:

$$\boldsymbol{B}(M) = \{\boldsymbol{F} = f(\tau, x) + F(\tau, x)\},$$

f – комплексные функции ($f = f_1 + if_2$) , а F –трехмерная вектор-функция с комплексными компонентами($F = F_1 + iF_2$), f и F– локально интегрируемы и дифференцируемы на $\mathbb{M}$.

Далее, скалярную часть бикватернионов обозначаем строчными буквами курсивом, а векторную часть – заглавными, тоже курсивом.

Пространство бикватернионов– ассоциативная, но некоммутативнаяалгебра со сложением вида:

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = (f + g) + (F + G),$$

и операцией кватернионного умножения

$$\boldsymbol{F} \circ \boldsymbol{G} = (f + F) \circ (g + G) = \\ \big(fg - (F, G)\big) + (fG + gF + [F, G])$$

Бикватернион $\boldsymbol{F}^* = \bar{f} - \bar{F}$, где черта обозначает соответствующие компонентам комплексно-сопряженные числа, называется *сопряженным*.

Если $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}$, бикватернион называется *самосопряженным.*

Далее используем дифференциальные операторы – взаимные бикватернионные градиенты (*биградиенты*):

$$\nabla^+ = \partial_\tau + i\nabla, \quad \nabla^- = \partial_\tau - i\nabla, \qquad (13)$$

где $\nabla = \mathrm{grad} = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$. Их действие на $\mathbb{B}(\mathbb{M})$ определено как в алгебре бикватернионов:

$$\nabla^+\boldsymbol{F} = (\partial_\tau + i\nabla) \circ (f + F) = \\ \big(\partial_\tau f - i(\nabla, F)\big) + \partial_\tau F + i\nabla f + i[\nabla, F] = \\ = (\partial_\tau f - idivF) + \partial_\tau F + i\mathrm{grad} f + irotF$$
$$\nabla^-\boldsymbol{F} = (\partial_\tau - i\nabla) \circ (f + F) = \\ = (\partial_\tau f + idivF) + \partial_\tau F - i\mathrm{grad} f - irotF$$

Легко показать, волновой оператор

$$\Box = \Box_1$$

можно представить в виде суперпозиции взаимных биградиентов:

$$\Box = \nabla^- \circ \nabla^+ = \nabla^+ \circ \nabla^-$$

Тогда

$$\nabla^-(\nabla^+\mathbf{B}) = \nabla^+(\nabla^-\mathbf{B}) = \Box\boldsymbol{B} \quad (14)$$

Для А-поля введем бикватернионы *напряженности поля*

$$\mathbf{A}=0+A$$

и *плотности заряда–тока*

$$\boldsymbol{\Theta} = i\rho(\tau,x) + J(\tau,x).$$

Тогда гамильтонову форму уравнений Максвелла (7) можно представить в виде одного бикватернионного волнового (*биволнового*) уравнения. Назовем его *биформой уравнений Максвелла*:

$$\nabla^+\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Theta} = 0 \quad (15)$$

что легко проверить, расписав его скалярную и векторную часть.

Используя свойство биградиентов (14), получим волновое уравнение для

$$\nabla^-\nabla^+\boldsymbol{A} = \Box(i\alpha + A) = \nabla^-\boldsymbol{\Theta} =$$
$$= -i(\partial_\tau\rho + div\, J) - \nabla\rho - \partial_\tau J + irot\, J$$

Откуда следует закон сохранения заряда (2) и волновое уравнение (11) **.**

Бикватернион

$$\boldsymbol{\Xi} = W + iP \quad (16)$$

плотность энергии-импульса – выражается формулой

$$\boldsymbol{\Xi}=0{,}5\boldsymbol{A}^* \circ \boldsymbol{A} =$$
$$= 0{,}5(A,\bar{A}) + 0{,}5[A,\bar{A}] \quad (17)$$

Таким образом, система уравнений Максвелла приводится к одному биволновому уравнению (15), которое имеет глубокое физическое толкование. А именно, из него следует, что *заряды и токи ЭМ-поля являются физическим проявлением биградиента напряженности ЭМ-поля.*

Если биградиент напряженности *ЭМ*-поля равен нулю

$$\nabla^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0},$$

тогда

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{0}.$$

Т.е. зарядов и токов нет!

Биформа модифицированных уравнений Максвелла

Из уравнений Максвелла следует, что скалярная часть бикватернина напряженности ЭМ-поля равна нулю. Естественно рассмотреть *модифицированнуюформу* уравнений Максвелла для **ЭМ**-поля, для которой ввести скалярное поле $\alpha(x,\tau)$в его бикватернион напряженности:

$$\mathbf{A} = i\alpha(x,\tau) + A(x,\tau) \quad (18)$$

Тогда из уравнения (15),с учетом (18), получим модифицированную гамильтонову форму уравнений Максвелла. Выписывая скалярную и векторную часть, получится

Модифицированная гамильтонова форма УМ

$$-\partial_\tau\alpha + div\, A = \rho$$
$$\nabla\alpha - \partial_\tau A - irotA = J \quad (19)$$

Полагая

$$\alpha(x,t) = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\varepsilon}} + i\frac{\alpha_2}{\sqrt{\mu}}$$

и разделяя действительную и мнимую часть, отсюда получается

Модифицированная система УМ

$$rot\, H - \varepsilon\frac{\partial E}{\partial t} + c^2\nabla\alpha_1 = j^E,$$
$$rot\, E + \mu\frac{\partial H}{\partial t} - c^2\nabla\alpha_2 = j^H, \quad (20)$$
$$\varepsilon\, div\, E + \partial_t\alpha_1 = \rho^E,$$
$$-\mu\, div\, H - \partial_t\alpha_2 = \rho^H$$

Заметим, что введение скалярного поля $\alpha(x,\tau)$связывает векторные и скалярные уравнения Максвелла в единую гиперболическую систему уравнений. Ее биформа имеет тот же вид (15), только напряженность выражается формулой (18). Она совпадает с уравнениями Максвелла, если a=0.

Используя свойство взаимных биградиентов (14), получим из биформы УМ (19) волновое уравнение

$$\mathbf{A} + \nabla^-\mathbf{\Theta} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Откуда в скалярной части имеем

Модифицированный закон сохранения заряда

$$\partial_\tau \rho + divJ = -\alpha \qquad (22)$$

и то же волновое уравнение (11) для A.

Ударные электромагнитные волны как обобщенные решения биформы УМ

Биволновые уравнения являются гиперболическими [6]. Поэтому модифицированные УМ являются системой гиперболического типа, которая допускает решения, разрывные на ее характеристических поверхностях (F), на которых

$$\nu_{\boldsymbol{\tau}}^{\mathbf{2}} - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2 = 0$$

Здесь (ν_τ, ν) - вектор нормали к F в M. Им соответствуют волновые фронты F_t, которые движутся в R^3с единичной скоростью

$$1 = -\nu_\tau / \|\nu\|, \qquad (23)$$

в направлении волнового вектора

$$n = \frac{\nu}{\|\nu\|}, \qquad (24)$$

$$\|\nu\| = (\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

Для построения условий на скачки векторов напряженностей на фронтах ударных волн используем метод обобщенных функций, основные идеи которого изложены на примере волнового уравнения в [10]. Для этого рассмотрим биформу УМ на пространстве обобщенных бикватернионов, компоненты которого принадлежат классу обобщенных функций D'(M)[11]. Согласно правилам дифференцирования разрывных регулярных обобщенных функций, вычислим биградиент обобщенного бикватернионас учетом (19)(шапочка над бикватернионом означает, что он рассматривается как обобщенный).

После простых вычислений в дифференциальной алгебре бикватернионов получим

$$\nabla^+ \widehat{\boldsymbol{A}} = (\partial_\tau + i\nabla)\left(i\hat{\alpha}(x,\tau) + \hat{A}(x,\tau)\right) =$$
$$= \nabla^+ \boldsymbol{A} + (\nu_\tau + i\nu) \circ [(i\alpha + A)]_F \boldsymbol{\delta_F} =$$
$$= -\boldsymbol{\Theta} + (\nu_\tau + i\nu) \circ [\boldsymbol{A}]_F \boldsymbol{\delta_F}$$

где $[\ldots]_{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{\delta_F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau})$ –сингулярная обобщенная функция *простой слой* [11] на характеристической поверхности F, плотность которого определяется скачком

$$(\nu_\tau + i\nu) \circ [\boldsymbol{A}]_F.$$

Для того, чтобы $\widehat{\boldsymbol{A}}$ был обобщенным решением (15),необходимо, чтобы

$$(\nu_\tau + i\nu) \circ [\boldsymbol{A}]_F = \mathbf{0} \qquad (25)$$

Отсюда следуют условия на скачки на характеристической поверхности скалярной и векторной части бикватерниона напряженности:

$$[(\nu_\tau \alpha + (\nu, A)]_F = 0,$$
$$[-\nu\alpha + \nu_\tau A + i\nu \times A]_F = 0 \qquad (26)$$

Тогда на фронтах ударных волн, с учетом (24) , получим соотношения:

$$[\alpha]_{F_t} = \left(n, [A]_{F_t}\right)$$
$$[A]_{F_t} = -n[\alpha]_{F_t} + i[n \times A]_{F_t} \qquad (27)$$

Если последнее уравнение скалярно умножить на волновой вектор, то получим величину для скачка *продольной составляющей* комплексного вектора напряженности ЭМ-поля на фронте ударной волны:

$$(n, [A]_{F_t}) = -[\alpha]_{F_t} \qquad (28)$$

Если $[\alpha]_{F_t} = 0$, то только тогда

$$(n, [A]_{F_t}) = 0. \qquad (29)$$

Поскольку для классических УМ скалярное поле$\alpha \equiv 0$, это условие поперечности ЭМ-волн в классической электродинамике всегда выполняется.

Условия на фронтах ударных электромагнитных волн.

Продольные ЭМ-волны

Распишем условия (27) для действительной и мнимой части компонент. Из скалярного условия (27)$_1$ получим условия на скачки для продольных составляющих векторов электрической и магнитной напряженности:

$$[\alpha_1]_{F_t} = \varepsilon(n, [E]_{F_t})$$
$$[\alpha_2]_{F_t} = \mu(n, [H]_{F_t}) \quad (30)$$

Наличие таких составляющих в экспериментах свидетельствует в пользу существования скалярного α – поля [8,9].

Из векторного условия на фронтах $(27)_2$ имеем

$$\varepsilon[E]_{F_t} = -c^{-1}n \times [H]_{F_t} - n[\alpha_1]_{F\,t}$$
$$\mu[H]_{F_t} = c^{-1}n \times [E]_{F_t} - n[\alpha_2]_{F_t} \quad (31)$$

При$\alpha = 0$ получим известные условия на скачки на фронтах ударных ЭМ-волн [4,5]:

$$\varepsilon[E]_{F_t} = -c^{-1}n \times [H]_{F\,t}$$
$$\mu[H]_{F_t} = c^{-1}n \times [E]_{F_t} \quad (32)$$

из которых следует ортогональность на фронте тройки векторов *n, E, H* (если перед фронтом волны *E*=0, *H*=0).

Заключение

Из теории биволновых уравнений [6] следует, скалярная часть решения даже однородного биволнового уравнения, не равна нулю. Это означает, что решения биформы модифицированных УМ и соответственно модифицированных уравнений Максвелла, даже однородных, содержат ненулевое скалярное α –поле. В работе [12] на основе биформы уравнений Максвелла разработана одна бикватернионная модель электрогравимагнитного поля и построены бикватернионные уравнения взаимодействия масс-зарядов и электрических и гравимагнитных токов. Эти уравнения показывают, что α –поле описывает свойство сопротивления или поглощения (в зависимости от знака), которое оказывает ЭМ-поле движению зарядов и токов. В пользу существования такого поля говорят многочисленные наблюдения, отраженные в современной литературе. В частности, библиография по этим вопросам хорошо отражена в работах Эткина В.А.[8], хотя природу продольных ЭМ–волн он объясняет иначе.

Литература:

1. Алексеева Л.А., СаутбековС.С. Фундаментальные решения уравнений Максвелла // Дифференциальные уравнения // Т. 35 (1999) . -№ 1.-С. 125-127;

2. Алексеева Л.А., Саутбеков С.С. Граничные интегральные уравнения стационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики // Т.40 (2000).-№4.-С.611-622;

3. Алексеева Л.А. Обобщенные решения нестационарных краевых задач для уравнений Максвелла // Журнал вычислительной математики и математической физики.- Т.42 (2002). -№1.- С.76-88;

4. Алексеева Л.А. О единственности решений начально-краевых задач для уравнений Максвелла в случае ударных электромагнитных волн // Известия НАН РК. Серия физико-математическая.-2001.-№ 5. -С.15-24;

5. Алексеева Л.А. Гамильтонова форма уравнений Максвелла и ее обобщенные решения // Дифференциальные уравнения. Т.39 (2003).-№6.-С.769-776;

6. Алексеева Л.А. Кватернионы гамильтоновой формы уравнений Максвелла // Математический журнал. – Т.3(2003).-№ 3.-С.20-24;

7. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. Преобразование Лоренца биволновых уравнений // Математический журнал // Т.10(2010).-№1.-С.33-41;

8. Алексеева Л.А. Дифференциальная алгебра бикватернионов. Обобщенные решения биволновых уравнений.2 // Математический журнал // Т.10(2010).-№3.-С.5-13;

9. Эткин В.А. Продольные волны как следствие уравнений Максвелла. www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/st5558.pdf;

10. Хворостенко Н.П. Продольные электромагнитные волны // Известия ВУЗов.Физика. -Вып 3.- 1992.-С. 24-29;

11. Алексеева Л.А. Метод обобщенных функций в нестационарных краевых задачах для волнового уравнения // Математический журнал.-Т. 6(2006). -№ 1.- С.16-32;

12. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.1976;

13. Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике.–Т.6 (2009)-. № 1.- С.122-134.

Принято в печать 20.10. 14

Людмила Алексеевна Алексеева, Гүлфариза Нұрланқызы Азиз
Институт математики и математического моделирования
ул.Пушкина, 125, Алматы, 050010, Казахстан, alexeeva@math.kz;
Казахский Национальный Университет им. аль–Фараби,
пр.аль-Фараби,71, Алматы, 050038, Казахстан, azizgulfariza@gmail.com

МОДИФИЦИРОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА НА ОСНОВЕ ЕЕ БИКВАТЕРНИОННОЙ ФОРМЫ. УДАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Аннотация. С использованием дифференциальной алгебры бикватернионов рассмотрена система уравнений Максвелла, ее гамильтонова и бикватернионная формы. С введением скалярного α–поля в бикватернион напряженности ЭМ-поля построены модифици-рованные бикватернионная форма, гамильтонова форма и связанная система модифицированных уравнений Максвелла гиперболического типа. Рассмотрены ударные электромагнитные волны как обобщенные решения биволновых уравнений, к которым принадлежит биформа уравнений Максвелла. Построены условия на скачки векторов напряженности ЭМ-поля на фронтах ударных волн. Показано, что ударные электромагнитные волны модифицированных уравнений содержат продольную составляющую напряженностей на фронтах, что подтверждается многочисленными экспериментальными наблюдениями, широко обсуждаемыми в настоящее время.

Ключевые слова: бикватернион, уравнения максвелла, модифицированная система, ударные волны.

Lyudmila Alexeyevna Alexeyeva, Gulfariza Nurlankizi Aziz
Institute of mathematic and mathematic modeling, Pushkin st., 125, Almaty, 050010, Kazakhstan, alexeeva@math.kz;Al-Farabi Kazakh National University, al-Farabi sq.,71, Almaty, 050038, Казахстан, azizgulfariza@gmail.com

MODIFIED SYSTEM OF MAXWELL EQUATIONS ON THE BASE IT'S BIQUATERNIONIC FORM. SHOCK ELECTROMAGNETIC WAVES

Abstract. The system of Maxwell equations and its hamiltonian biquaternionic form are considered with use of differential algebra of biquaternions. Modified biquaternionic form, hamiltonian form and the associated modified system of Maxwell equations of hyperbolic type are built with introducing the scalar α- field in the biquaternion of intensity of EM- field. Electromagnetic shock waves are considered as generalized solutions of biwave equations to which the biform of Maxwell equations is reduced. Conditions on the jump of electric and magnetic intensities on the shock waves fronts have been built. It's shown, that shock

electromagnetic waves of modified equations contain longitudinal components of the intensities at the front. That's confirmed by numerous experimental observations which are widely discussed at present.

Людмила Алексеевна Алексеева, Гүлфариза Нұрланқызы Азиз
Математика және математикалық пішіндеу институты, көш.Пушкин, 125, Алматы, 050010, Қазақстан, alexeeva@math.kz; Әль–Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, көш.әль-Фараби,71, Алматы, 050038, Қазақстан, azizgulfariza@gmail.com

БИКВАТЕРНИОН ПІШІНІН ҚОЛДАНЫП ЖАҢАШАЛАНҒАН МАКСВЕЛЛ ЖУЕСІ. СЕРПІНДІ ЭЛЕКТРОМАГНИТТІК ТОЛҚЫНДАР

Аннотация. Дифференциалдық бикватернион алгебрасын қолданып Максвелл жүесимен оның гамильтон және бикватернион пішіні қарастырылды. ЭМ алаңының бикватернион кернеулігіне скалярды α алаңының кіріспесімен жаңашаланған бикватернион және гамильтон пішіндерімен гиперболалық түрінде жаңаша байланысты Максвелл жүеси құрылды. Серпінді электромагниттік толқындар Максвелл бипішин жүесине тән жиынтық шығарылған битолқындар есептері сиякты қарастырылды. Серпінді толқындар майданында ЭМ алаңының кернеулік кенет өзгеру векторының шарттары құрылды. Жаңашаланған серпінді толқындар теңдеулерінің кернеулік майданының құрамында бойлық толқын бары көрсетілген, бұл жай кәзіргі уақытта қалың талкыланып көптеген экспериментaлдық қадағалаулармен расталады.

Кілт сөздер: бикватернион, Максвелл теңдеуі, модификацияланған жүйе, екпінді толқындар.