МРНТИ 29.17.01.11, 30.17.01

Ю.Д. Чашечкин
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН,
Россия, Москва, e-mail: chakin@ipmnet.ru

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОСНОВ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

Аннотация. Приводится краткое описание истории развития теории течений жидкостей, проводится анализ аксиоматики классической механики жидкости и твердого тела с учетом условия наблюдаемости рассчитываемых величин. Определяющие уравнения представлены в дифференциальной форме законов сохранения вещества, импульса, энергии. Классическая система уравнений механики жидкостей анализируется с учетом условия совместности методами теории сингулярных возмущений. Решения системы уравнений, описывающие волны, вихри и тонкие прослойки – лигаменты, сравниваются с результатами численных расчетов и высокоразрешающего лабораторного моделирования стратифицированных течений.

Ключевые слова: аксиоматика, фундаментальные уравнения, полные решения.

Введение

Глубина научного содержания, широта спектра практических приложений, степень влияния на все стороны жизни, предоставляют механике жидкостей особое место в реестре естественных наук. По мере развития экономики и роста населения увеличивается и сложность изучаемых проблем, среди которых на одно из первых мест выходят задачи описания состояния и прогноза изменчивости среды обитания человечества – атмосферы, гидросферы, геосферы Земли и других планет. Несмотря на большие усилия, которые выразились в создании обширных семейств инструментов дистанционного зондирования и контактных измерений, специализированных лабораторий и вычислительных центров с ЭВМ рекордной производительности, прогресс в развитии теоретической и прикладной гидродинамики все еще отстает от реальных потребностей. Ряд практических задач решается медленно (например, создание новых двигателей) или очень медленно (прогноз погоды, создание термоядерного реактора). С научной точки зрения следует отметить несогласованность теории и эксперимента, проявляющуюся в низкой точности гидродинамических измерений (10 … 20%) по сравнению с классической механикой (относительная погрешность в навигации не хуже 10^{-14}). Для анализа природы рассогласования основных разделов механики целесообразно обратится к рассмотрению научных основ естественных наук в историческом и методологическом аспектах с учетом их современного содержания и технических возможностей.

Краткая история развития механики жидкостей. Начальный интуитивно-эмпирический период.

Длительное период эмпирического развития механики жидкостей отмечен рядом выдающихся достижений, включающих такие ирригационные сооружения, как гонабадская система кярызов, работающая более 2700 лет, чуть более молодая гидравлическая система Дуцзянъянь (Ченду, Китай), водоводы Рима, непрерывно работающие с момента создания и до сегодняшнего дня. Развитие средневековых военных и промышленных технологий, потребовало более высокого уровня адекватности гидродинамики выстрела и корабля и, привело Г. Галилея к необходимости обоснования методологии естественно-научных исследований "Философия написана в той величественной Книге (я имею в виду Вселенную), которая всегда открыта нашему взору, но читать её может лишь тот, кто сначала освоит язык и научится понимать знаки, которыми она начертана. Написана же она на языке математики, и знаки её — треугольники, окружности и другие геометрические фигуры, без которых нельзя понять ни единого из стоящих в ней слов и остаётся лишь блуждать в тёмном лабиринте" [1, 1623 г.]. Одновременно Г. Галилей обдумывал принципы создания инструментов для измерений параметров течений, создавал прототипы термометра и барометра.

Эмпирио-эвристический этап.

Работы Галилея открыли период эвристического развития науки, в начале которого Р. Декарт, размышлявший о методологии науки, ввел понятие координат точки в пространстве и предложил использовать для описания явлений их меры – сохраняющиеся (наблюдаемые) величины. В качестве меры движения Р. Декарт выбрал импульс $p = mv$ ($m-$ масса, v – скорость тела) и сформулировал закон его сохранения в ряду других постулатов [2, 1641 г.].

В небольшой полемической заметке В. Лейбниц [3, 1686 г.], предложил в качестве меры движения использовать "живую силу" (vis viva $E = mv^2$) – с точностью до коэффициента равную кинетической энергии, включив в описание движения и явную кинетическую, и латентную потенциальную энергию. Понятия энергии и импульса универсальны, их применение не накладывает ограничений на размеры и форму тела, характер его движения.

И. Ньютон, используя галилеево описание движения, основанное на регистрации положения тела – координаты $\mathbf{x}$, скорости $\dot{\mathbf{x}}$, ускорения $\ddot{\mathbf{x}}$, ввел понятие силы (Второй закон $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$) и сформулировал в книге, изданной в 1687 г., категорию правил, при формализации которых реальное тело конечных размеров было стянуто в "материальную точку". Три сформулированных Ньютоном закона [4] составляют неизменную основу классической механики твердого тела от даты опубликования до настоящего времени.

Оба подхода, и энергетический Лейбница, и силовой Ньютона, в дальнейшем развивались и независимо, и во взаимосвязи. Энергетический подход первым развил Д. Бернулли, который ввел термин "гидродинамика" в научное описание течений [5] и получил знаменитую формулу, связывающую скорость и давление в потоке. Быстрое развитие математики – геометрии и анализа бесконечно малых величин в XIX веке – способствовало формированию нового подхода к описанию процессов в жидкостях.

Фундаментальные законы

Дифференциальные уравнения в частных производных впервые применил Ж.-Р. Даламбер для расчета колебаний струны. Ему же принадлежит и вывод уравнения неразрывности [6, 1744 г] для несжимаемых с плотностью ρ и сжимаемых (баротропных) сред с плотностью, зависящей от давления $\rho(P)$

$$\rho = \text{const}, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ или } \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (1)$$

Распространив представления Ньютона о действии сил на гипотетическую «жидкую частицу» сплошной среды, Л. Эйлер получил первую замкнутую систему уравнений гидродинамики [7, 1752 г., публикация 1757 г.]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}, \ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0 \qquad (2)$$

в которую вошли следующие физические величины: плотность среды ($\rho = \text{const}$ или $\rho = \rho(P)$), скорость $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ и давление P жидкости ($\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, ∇ – оператор Гамильтона). Хотя логика вывода уравнений Эйлера нуждается в уточнении (оценке обоснованности и следствий использования гипотез "отвердевании жидкой частицы" при расчете сил, существования массы бесконечно малой "частицы"), и само уравнение, и его вывод, продолжают активно изучаться и приводятся в основных учебниках по гидродинамике [8]. Число переменных в системе Эйлера (четыре) превышает ранг системы (второй), из набора естественных граничных условий для скорости выполняется только одно – непротекания для нормальной компоненты. В силу относительной простоты система (2), несмотря на недоопределенность, продолжает широко использоваться в теоретической и прикладной гидродинамике, в частности для изучения волн и вихрей.

Обобщив результаты тщательных экспериментов по теплопередаче, проводимых совместно с П.-С. Лапласом, Дж. Фурье постулировал уравнение переноса тепла $\mathbf{q}$ в твердом теле [9] а позднее – и температуры T в жидкости

$$\mathbf{q} = -\kappa_q \nabla T, \ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)T = \kappa_T \Delta T \qquad (3)$$

с использованием новых констант – коэффициентов температуропроводности κ_T и теплопроводности $\kappa_q = \rho c_P \kappa_T$, c_P – теплоемкость при постоянном давлении. Фурье активно развивал теорию и практику предложенных Д. Бернулли разложений в ряды по тригонометрическим функциям применительно к задачам теплопроводности и решению широкого класса дифференциальных уравнений.

Идеи Фурье оказали большое влияние на развитие и теории, и эксперимента. Один из его учеников, К. Навье, базируясь на представлениях Лапласа о дискретном строении вещества, получил основное уравнение течений вязких жидкостей [10] в которое вошел новый параметр среды – кинематическая вязкость ν

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v}, \qquad (4)$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v}|_{\Sigma} = 0,$$

Для получения практических результатов К. Навье использовал два вида граничных условий: вначале – прилипания на твердой границе Σ, а затем – частичного проскальзывания $E\mathbf{v} + \nu\partial_{\perp}\mathbf{v}_{\parallel} = 0$, подгоняя расчеты под данные небрежных экспериментов Жирара, в которых расход оказался пропорционален кубу диаметра трубки, а не четвертой степени, как в позднейших опытах Хагена и Пуазейля. В уравнении Навье сохранились физические величины уравнения Эйлера – плотность, давление, скорость жидкости, и вошли новые параметры среды – кинематическая вязкость ν и коэффициент проскальзывания E в граничном условии.

Уравнения Навье, скептически встреченные современниками, которые считали их гипотезой, требующей экспериментального подтверждения, были несколько раз независимо перевыведены С.-Д. Пуассоном, О. Коши, А.Б. Сен-Венаном, прежде чем Дж.Г. Стокс сформулировал четкие гипотезы, позволяющие постулировать уравнения в рамках теории течений сплошной среды, описываемых непрерывными функциями.

Сделав обоснованные предположения, введя понятие «второй» вязкости с коэффициентом ζ, постулировав независимость вязкости от давления, Стокс сохранил уравнение неразрывности и привел к современному виду уравнения Навье [11, 1845 г.]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}) \qquad (4)$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0$$

Построенные Стоксом решения задач обтекания препятствий, распространения волн и сегодня служат логической основой построения приближенных аналитических и численных решений [8] и разработки методик экспериментов. Вопрос разрешимости трехмерных уравнений Навье – Стокса для однородной жидкости остается открытым [12]. Концепция использования непрерывных функций для описания течений продолжает успешно использоваться и в настоящее время с учетом взаимодействия макро- и микрокомпонентов энергии [13].

Развитие технологий в XIX веке стимулировало физические исследования свойств многослойных несмешивающихся жидкостей и реальных растворов, в ходе которых А. Фик, проследив закономерности молекулярного переноса вещества, сформулировал близкие по структуре к законам Фурье уравнения переноса концентрации i-го растворенного вещества S_i [14], содержащие новый параметр – коэффициент диффузии κ_{S_i}

$$\frac{\partial S_i}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)S_i = \kappa_{S_i}\Delta S_i \qquad (5)$$

В зависимости от физических условий задачи уравнения (6) решаются с граничными условиями различного вида: непротекания или заданного значения потока, задания значения солености или смешанного вида.

Анализируя методы описания физических полей, Максвелл установил векторную природу скорости жидкости и обосновал принцип наблюдаемости физической величины – возможности измерения ее значения с одновременной обоснованной оценкой погрешности – необходимый для выполнения количественного сравнения теории и эксперимента [15].

Изучению зависимости важного для гидродинамики параметра – плотности, других физических свойств неоднородных жидкостей и газов от концентрации входящих веществ и температуры, уделил внимание великий Д.И. Менделеев. Он обобщил данные собственных экспериментальных исследований и привел результаты к удобным для дальнейшего использования эмпирическим формулам – уравнениям состояния газов и жидкостей [16, 17], как позднее было признано, необходимых для замыкания системы фундаментальных уравнений [8].

В конце XIX века, когда большое внимание уделялось изучению дискретной природы материи, свойств энергии и механизмов ее передачи, влияющих на динамику течений жидкостей, важные результаты получил Дж. Гиббс, в работах которого в процессе уточнения природы термодинамических потенциалов были введены понятия химического потенциала и доступной потенциальной поверхностной энергии [18].

Таким образом, к концу XIX века были постулированы все уравнения, составляющие основу полного описания течений жидкостей. Однако необходимое дальнейшее развитие данное направление не получило по ряду причин, среди которых следует отметить неразвитость математических методов анализа сложных систем алгебро-дифференциальных уравнений, трудоемкость реализации техники вычислений. Одновременное развитие идей дискретного – атомно-молекулярного – строения вещества, статистических методов в математике и физике стимулировало создание альтернативных подходов к описанию течений жидкостей, среди которых наибольшее развитие получили редуцированные (теории волн, пограничного слоя [8]) и конститутивные модели (теории устойчивости и турбулентности, в развитии которых особая роль принадлежит О. Рейнольдсу [19, 20]).

Эпоха «множественности независимых подходов».

К концу XIX века и в течение всего XX века было построено большое число приближенных полуэмпирических моделей нелинейных и линейных волн, вихрей, пограничного слоя, турбулентности и других, которые способствовали успешному развитию авиации, судостроения, современных технологий. Одновременно независимое развитие вычислительной техники и цифровых технологий существенно расширило возможности и теоретической, и экспериментальной гидродинамики, позволило практически реализовать различные модели, степень соответствия которых между собой и с системой фундаментальных уравнений не определена. Однако низкие точности проводимых измерений и расчетов, отсутствие прогресса в ключевых разделах прикладной и теоретической гидродинамики, заставляют вернуться еще раз к обсуждению основ и методологии построения естественных наук, и математики – языка изложения и обобщения наблюдательных фактов.

Определения наук

Возможности математизации естественных наук длительное время сдерживалась физической ограниченностью техники проведения необходимых математических операций и представления результатов исследования нелинейных задач высокой размерности, сравнения эффективности различных подходов. Развитие компьютерных технологий позволило преодолеть технические трудности, практически реализовать многие ранее сформулированные идеи, требовавшие проведения большого числа операций и дать четкие определения ряду понятий, которые ранее использовались на интуитивном уровне в рамках эвристического описания. К основным следует отнести определения математики, естественных и прикладных наук.

Математика: *аксиоматическое учение (наука) о правилах выбора символов, проведения операций и принципах контроля их точности.*

В силу аксиоматической природы построения с использованием критериев неизменности понятий в ходе проведения операций; разрешимости (полноты); внутренней непротиворечивости, четкости правил проведения операций и тождественности их результатов исходным постановкам, математика, единственная из всех наук, обладает правом устанавливать точность или ошибочность суждений и давать оценку их погрешности, как разности между полученным и истинным (постулированным) значением (изучаемой величины). Основные понятия математики определены и аксиоматизированы.

Физика: *эмпирио – аксиоматическое учение о природе в целом, структуре материи и всех видах происходящих изменений*.

Физика в первую очередь базируется на опытных фактах, результатах наблюдений и измерений (сравнений), по результатам которых вводятся новые понятия и правила работы с ними, основанные на математических принципах.

В традиционном определении ***механика*** в целом и ее части, работающие с деформируемыми средами – «искусство делать машины и технологии». Однако сегодня ***механика*** более широко рассматривается как *эмпирио – аксиоматическое учение о свойствах пространства, времени, положений и движений материальных тел*.

В каждой из наук сформулированы собственные наборы понятий, которые непрерывно видоизменяются, дополняются новыми элементами и теряет некоторые старые. Часть из них имеет аналоги в аксиоматике или следствиях ее использования в математике. И наоборот, некоторые математические понятия, имеющие аналоги в физике и механике, в процессе эволюции математики приобрели особую важность, обусловленную возможностью прогнозировать поведение физических систем и разрабатывать эффективные методы управления явлениями/процессами.

Из общей математики в отдельный раздел выделилась ***Прикладная математика*** – раздел аксиоматической науки, базовые символы которой имеют аналоги в наборе наблюдаемых физических величин.

Определение. ***Физическая величина наблюдаема****,* если одновременно с ее измерением (определением количественного значения, выраженного размерным числом) может быть определена погрешность результата – отличие постулированного (истинного) и измеренного значений.

Из математической и физической практики известно, что ***наблюдаемы только инварианты*** – величины, сохраняющиеся при преобразовании координат, а также параметры, связанные с инвариантами функциональными соотношениями – меры положения, движения тел и течений жидкостей. Инвариантами являются расстояния, интервалы времени, масса, импульс, энергия, концентрация и другие величины, для которых сформулированы законы сохранения.

Содержание математических понятий

Применительно к гидродинамике, из многочисленных математических понятий наиболее активно используются следующие

Числа – априори введенные безразмерные символы нумерации, количества, сравнения. В механике используются действительные числа, позволяющие рассчитывать физически наблюдаемые величины, и их расширения – комплексные числа, сокращающие операции и формы представления их результатов.

Множества – собрания определенных и различимых между собой объектов, мыслимые как "единое целое", дополненные правилами выполнения операций (примеры приведены в ряде монографий и справочников). Принадлежность элемента к определенному множеству обозначается дополнительным признаком, получившим название "*размерность*" (в метрологии – "выражение зависимости величины от основных величин системы величин"). Примеры основных множеств – пространство и время.

Ключевые понятия классической механики – "пространство" как местоположение тел и "время" – мера перемен, вводятся аксиоматически и рассматриваются как две самостоятельные непрерывные сущности, существующие наряду с материей и независимо от нее. Априорные концепции взаимно независимых категорий "пространство" и "время" в классической механике предполагают их однородность, независимость от присутствия тел и характера протекающих материальных процессов.

Введением системы координат каждой точке пространства ставят в соответствие набор вещественных чисел, минимальное число элементов которого (безразмерное), общее для всех объектов, характеризует математически определенную размерность пространства. В естественных науках активно используется один из видов множеств – векторное пространство.

В качестве одного из общих оснований физических теорий выбран постулат трехмерности метрического (евклидова) пространства. Стандартный базис трехмерного пространства задается ортами e_1, e_2, e_3. Инварианты пространства – интервалы (расстояния между телами), времени (длительности или обратные значения – частоты) и массы – базовые наблюдаемые величины, положенные в основу стандартов и метрических систем.

Аксиоматика векторных пространств допускает операции сложения и умножения, внутренней композиции (сложения векторов), ассоциативности, коммутативности с выполнением правил алгебраического сложения (вычитания) векторов, ассоциативности произведения множителей; умножения на единицу, дистрибутивности и *внешней композиции* – сохранения в векторном пространстве результата произведения скаляра на вектор. Последнее условие обосновывает возможность объединения в единый комплекс ньютонову механику твердого тела, абстрактную и прикладную математику.

В число возможных операций входят различные виды преобразований пространства (подобия, проективные, аффинные), включающие ортогональные аффинные отображения метрического пространства (x, y, z) в пространство (x', y', z')), сохраняющие расстояния между элементами. В декартовой системе координат ортогональные преобразования задаются формулами $x'_i = a_{ik} x_k$; $a_{ji} a_{jk} = 0$ при $i \neq k$; $a_{ji} a_{jk} = 1$ при $i = k$.

Движение, как математическая операция, определяется как *непрерывное ортогональное преобразование пространства в себя с параметром t* – временем*, сохраняющее расстояния между точками и относительное расположение объектов*. При этом определитель из коэффициентов матрицы преобразования a_{ik} равен $\|a_{ik}\| = +1$. Не сохраняющее ориентацию фигур ортогональное преобразование с определителем $\|a_{ik}\| = -1$ задает отражение относительно некоторой оси.

Движению в евклидовом пространстве соответствует группа ортогональных преобразований пространства в себя, включающая *независимые* подгруппы перемещений и вращений. Преобразования, задаваемые группой движений, изучает элементарная геометрия.

Переход от геометрии к ньютоновской механике обеспечивается введением тел – наделением отдельных точек пространства дополнительными признаками – подвижностью и массой m. В математике масса – положительно определенная скалярная величина, в механике – мера инерции и гравитационного взаимодействия, в физике – количества вещества, в метрологии – одно из оснований системы стандартов. В процессе движения масса тела предполагается постоянной или изменяющейся по заданному закону.

Для описания движения вводятся две системы координат – исходная, связанная с абсолютным пространством и подвижная, связанная с движущейся материальной точкой. В абсолютной системе координат движение материальной точки характеризуется набором положений (траекторией) $S(x, y, z)$, скоростью $\mathbf{v} = (\mathrm{v}_x, \mathrm{v}_y, \mathrm{v}_z) = \frac{d\mathbf{R}}{dS}\frac{dS}{dt} = \boldsymbol{\tau}\frac{dS}{dt}$ и ускорением $\mathbf{w} = \frac{d\mathrm{v}}{dt}\boldsymbol{\tau} + \mathrm{v}^2\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ ($\mathbf{R}$ – радиус-вектор тела, $\boldsymbol{\tau}$ – единичный вектор, задающий локальное направление касательной к траектории движения тела S, $\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}$ – вектор кривизны. Движение материальной точки в конфигурационном пространстве $\delta\mathbf{r} = \mathbf{v}_t \delta t + \boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{r}$ включает прямолинейное перемещение со скоростью $\mathbf{v}_t$ и/или вращение вокруг мгновенного центра с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$.

Для описания динамики движения используется понятие силы $\mathbf{F}$, значение которой определяется действием внешних полей и ускорением материальной точки $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ (второй закон Ньютона). Инварианты движения – вектор импульса тела ("материальной точки") $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и скаляр – энергия $E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$.

Следствие важного правила векторных пространств – **внешней композиции** – является эквивалентность векторных пространств *импульса* (инварианта движения) и *скорости* (кинематической характеристики), содержащих точечные тела неизменной массы. Следовательно, описание движения как перемещения тела относительно системы тел, образующих репер, согласуется с операцией преобразования пространства в себя с сохранением расстояний. Два определения *движения* – динамическое и геометрическое эквивалентны.

Практическое описание движений тел проводится в алгебрах вещественных или комплексных чисел и кватернионов (последняя оказывается наиболее экономной при символьном программировании задач механики). Таким образом, тождественность ньютоновской механики геометрии векторных пространств обеспечивает эквивалентность математики и ньютоновской механики материальной точки массой m, обладающей вектором импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ и энергией $E = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$.

Окончательно связь между физическими характеристиками движения тела (импульсом, энергией, моментом количества движения) с фундаментальными свойствами пространства позволили установить теоремы Нетер, сформулированные для консервативных систем с сохраняющимся функционалом действия – функцией Лагранжа, которые выражают инвариантность действия по отношению к некоторой непрерывной группе преобразований.

По теореме Нетер каждой инфинитезимальной симметрии системы соответствует закон сохранения. В частности, в классической механике однородности времени и пространства соответствуют законы сохранения энергии и импульса. Изотропии пространства соответствует закон сохранения момента количества движения.

Математически установленные теоремы для консервативных систем в дальнейшем распространенные на эволюционирующие во времени системы тел и полей, в дальнейшем приобрели смысл балансных уравнений и стали применяться в качестве логической основой описания динамики сложных диссипативных систем. Достоинством такого подхода является логическая и эвристическая обоснованность и конструктивность, позволяющая установить какие из практически используемых физических величин являются наблюдаемыми, то есть допускающими оценку погрешности, а какие – нет, и требующими разработки специальных процедур для определения и использования их значений на практике

Общая механика твердого тела

Движение твердого тела произвольной формы с неоднородной плотностью $\rho(x, y, z)$, в том числе и с пустотами, формой $Z_l = Z(x, y)$, и габаритами (l_x, l_y, l_z), объемом V, массой m^b, тензором инерции m_{ij}, которое движется с линейной скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y\, v_z)$ и одновременно вращается с угловой скоростью $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ характеризуется импульсом $P_i = m^b v_i + m_{ij}^b \omega_j$, моментом импульса $L_i^b = \sum_k m_{ik}\omega_k$, энергией вращения $E_\omega^b = \frac{1}{2}\sum_{i,k}\omega_i m_{ik}\omega_k$ и полной энергией движения $E_t^b = \frac{m^b v_i v_i}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i,k}\omega_i m_{ik}\omega_k$.

Движения в механике описывает полная система дифференциальных уравнений, представляющих законы сохранения, включающая уравнения характеризующие измерения параметров тела (его массы и тензора инерции) и всех независимые инвариантных величин (импульса, энергии, момента импульса), а также соответствующих начальных и граничных условий.

Динамика движения тела сложной переменной массы и переменной формы описывается полными решениями системы уравнений, учитывающей за счет действия внешних источников с интенсивностями Q, вызывающими изменение массы тела $Q^m(t)$, тензора инерции m_{ij}^m (перестройку формы и плотности распределения масс $Q_{ik}^m(t)$), полной энергии Q^e, векторов импульса (под действием внешних силы Q_i) и момента импульса Q_i^l под действием моментов сил.

Изменения каждой из независимых фундаментальных величин A под действием и плотностью внешних источников плотностью Q или полей описываются законами сохранения

$$\frac{dA}{dt}=Q \qquad (6)$$

При изучении движений твердого тела энергия обычно рассматривается как производная величина, один из интегралов уравнений Ньютона. Однако здесь энергия считается независимой переменной, которая учитывает действие изотропных полей (при взаимодействии тела с анизотропным полями, необходимо учитывать дополнительные потоки импульса).

При изучении динамики течений сплошной среды (жидкости) учитывается поток всех сохраняющихся величин $A\mathbf{v}$ (положительный знак потока – из области описания наружу) через инфинитезимальную ограничивающую поверхность

$$\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial\left(Av_i\right)}{\partial x_k}=Q^M \qquad (7)$$

В уравнения системы (7) входят все сохраняющиеся величины, кроме момента импульса, который не является инвариантом вследствие текучести жидкости, обеспечивающей в трехмерном пространстве перераспределения значений компонентов скоростей и отличие скорости в каждой точке от распределения твердотельного вращения).

Системы уравнений вида (7) должны анализироваться с учетом условия совместности, определяющего их ранг и число независимых функций, составляющих полное решений, которое описывает все физические переменные задачи и удовлетворяет начальным и граничным условиям. Составление уравнений и их решение представляет трудную задачу в каждом конкретном случае, особенно для тел сложной формы и жидкостей в полях внешних сил.

Теория течений жидкостей

Основы теоретической гидродинамики, как науки о поведении сплошной среды, свойства которой описываются непрерывными функциями, противоречат общепринятой теории дискретного строения вещества, состоящих из атомов и молекул размерами порядка 10^{-8} см, которые часто образуют кластеры размером 10^{-6} см. Однако при рассмотрении течений больших масштабов непосредственным влиянием дискретного строения вещества пренебрегается.

В современной термогидромеханике влияние атомно-молекулярных взаимодействий учитывается в выражениях для термодинамических потенциалов: внутренней и свободной энергии, энтальпии и свободной энтальпии – потенциала Гиббса dG, а также их производных – термодинамических параметров среды: плотности $\rho=1/V=\left(\partial G/\partial P\right)_T^{-1}$, давления P, температуры T, энтропии $s=-\left(\partial G/\partial T\right)_P$, коэффициента поверхностного натяжения на границах раздела агрегатных состояний площадью S_f $\sigma=\left(\partial G/S_f\right)_{T,P}$, концентрации растворимых вещества S_i, химического потенциала $\mu=\left(\partial G/\partial S_i\right)_{T,P,S_f}$ и других.

Одним из определяющих свойств жидкости является – текучесть, способность приходить в движение под действием бесконечно малых сил. Еще одно важное свойство – возможность взаимных переходов составляющих компонентов энергии – внешней потенциальной, механического движения, внутренней энергии с участием доступной потенциальной поверхностной энергии σdS_f, химической энергии $\mu_i dS_i$, связанной с изменением концентраций dS_i веществ

$$dG=-sdT+VdP+\mu_i dS_i+\sigma dS_f . \qquad (8)$$

Обмен энергией может происходить и медленно, под действием диффузионных процессов, и более быстро в рамках механического переноса, и достаточно быстро под действием атомно-молекулярных взаимодействий (например распространении звука или при освобождении доступной потенциальной энергии $dG=\sigma dS_f$, сосредоточенной в тонком приповерхностном слое толщиной порядка 10^{-6} см, а также химической энергии при протекании реакций и изменении концентрации веществ $\mu_i dS_i$). Наличие процессов, локализованных на малых масштабах, приводит к формированию тонких структур жидкостей и газов в природных условиях и технологических установках.

В общем случае жидкости неоднородны по составу, температуре, и, поскольку находятся в поле массовых сил, стратифицированы. Параметрами стратификации являются масштаб $\Lambda = \left| d \ln \rho(z) / dz \right|^{-1}$, частота $N = \sqrt{g / \Lambda}$ и период плавучести $T_b = 2\pi / N$. Реальные среды – атмосфера, гидросфера характеризуются тонкой пространственной структурой в распределениях физических величин – и потенциалов, и термодинамических параметров.

Все уравнения механики жидкостей, составляющие основу современной теории течений, которой впервые были собраны в фундаментальном курсе [8], вышедшем в 1944 г., продолжают приводиться во всех современных учебниках и монографиях.

Сейчас они рассматриваются как система уравнений, включающая уравнения состояния для одного из термодинамических потенциалов, например, свободной энтальпии Гиббса, и главного механического параметра – плотности среды, а также дифференциальные уравнения переноса импульса, полной энергии (или энтропии, или температуры), концентрации составляющих компонентов [21]. Здесь они представлены с учетом Ω_k – угловой скорости глобального вращения жидкости; эффектов вязкости, температуропроводности и диффузии с коэффициентами $\nu,\ \kappa_T, \kappa_S$; действием источников плотности импульса, температуры и соли Q_i, Q_T, Q_{S_i}, соответственно. Скорость жидкости $\mathrm{v}_i = p_i / \rho$ определяется как отношение двух инвариантных величин. Тогда полная система связанных фундаментальных уравнений имеет вид [8]

$$\begin{cases} \rho = \rho\left(P(\mathbf{x},t), S_i(\mathbf{x},t), T(\mathbf{x},t)\right),\ G = G(\mathbf{x},t) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 \\ \dfrac{\partial (p_i)}{\partial t} + \left(\dfrac{p_j}{\rho}\nabla_j\right) p_i = -\nabla_i P + \rho g_i + \nu\Delta(p_i) + \\ +2\varepsilon_{ijk} p_j \Omega_k + Q_i \\ \dfrac{\partial \rho T}{\partial t} + \nabla_j \cdot (p_j T) = \Delta(\kappa_T \rho T) + Q_T \\ \dfrac{\partial \rho S_i}{\partial t} + \nabla_j \cdot (p_j S_i) = \Delta(\kappa_S \rho S_i) + Q_{S_i} \end{cases} \tag{9}$$

Вид уравнения состояния выбирается с учетом состава среды и характера изучаемых течений. Система (9) включает диссипацию импульса, но не учитывает влияние процессов с быстрыми изменениями внутренней энергии. Система дополняется физически обоснованными граничными условиями – прилипания на твердых границах, динамических и кинематических на свободной поверхности, затухания на бесконечности – и начальными условиями [8].

Инфинитезимальные симметрии системы включают сдвиги по пространству и времени, вращения, и преобразования Галилея, что соответствуют фундаментальным принципам физики, положенным в основу ее вывода [21].

Условие совместности определяет ***ранг*** полной нелинейной системы, ***порядок*** ее линеаризованной версии и ***степень*** характеристического (дисперсионного) алгебраического уравнения, задает число независимых функций (минимальный набор для нелинейной системы), составляющих полное решение.

Для маловязких сред, к числу которых относятся вода и водные растворы, воздух и другие газы, кинетические коэффициенты при старших производных малы, система (9) относится к классу сингулярно-возмущенных уравнений, решения которых включают и регулярные, и сингулярные функции [22]. При анализе периодических по времени течений регулярные асимптотические разложения удовлетворительно описывают волны – крупномасштабные компоненты, в которых мгновенные пространственные характеристики (длина волны λ, волновое число $\mathbf{k}$) связаны с локальным временным параметром (периодом T, частотой ω) функциональным (дисперсионным) соотношением $\omega = \omega\mathbf{k}, \mathbf{kA}$ ($\mathbf{A}$ – амплитуда). С точностью до вида диссипативных поправок решения фундаментальной системы и ее подсистем – уравнений Навье-Стокса и Эйлера – согласуются между собой.

Сингулярные решения – лигаменты, зависящие от вида среды, энергетики и геометрии задачи, определяют положение областей высокого уровня завихренности, диссипации энергии, концентрации переносимых примесей и тонкую пространственную структуру течения в целом [23].

Как и волны, лигаменты характеризуются функциональными связями между временными и пространственными параметрами течений. В опытах лигаменты визуализируются как тонкие высокоградиентные оболочки и волокна (филаменты). Число лигаментов – сингулярно возмущенных решений в каждой точке течения определяется рангом системы, фактически – полнотой уравнения состояния – зависимостью плотности от состава и температуры среды и числом дополнительных уравнений переноса типа Фурье-Фика в полной системе уравнений.

Волны и лигаменты составляют полной решение линеаризованной системы фундаментальных уравнений, описывающее изменение всех входящих в нее физических величин и удовлетворяющее физически обоснованным граничным условиям. Они присутствуют в течениях во всех доступных для наблюдений режимах течений: и наиболее медленных, ползучих (например, наиболее распространенных в природе течениях, индуцированных диффузией на топографии [24]), и наиболее быстрых гиперзвуковых в атмосферах Земли, планет и звезд.

В предположении постоянства плотности система (8) вырождается по сингулярным решениям и в трехмерной постановке становится переопределенной (система уравнений Навье – Стокса для четырех переменных – трех компонент скорости и давления имеет шестой ранг) и неразрешимой.

Полная система уравнений включает нелинейные члены, описывающие взаимодействие базовых структурных компонентов [25], продуктом которого являются новые волны, лигаменты вихри и ударные волны. Лигаменты – линейные предшественники ударных волн, наблюдаются во всех режимах течений.

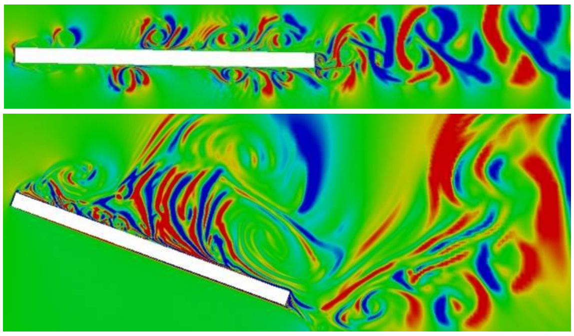
Из принципа совместности уравнений следует требование одновременного расчета или измерения всех физических величин, входящих в фундаментальную систему. При этом импульс среды может быть определен двумя независимыми способами – по измерениям силового действия потока на стандартное препятствие и определению расхода. Именно последний способ был реализован в классических экспериментах Пуазейля, Хагена и Рейнольдса, однако при интерпретации результатов использовалось понятие скорости в предположении неизменности плотности среды.

Для обеспечения полноты эксперимента измерения импульса должны дополняться определением термодинамических параметров потока. Достаточно хорошо разработанные методики измерения температуры, концентрации компонентов, плотности и давления должны реализовываться совместно. Одновременные измерения всех инвариантных параметров течений обеспечивает возможность локального сравнения рассчитанных и измеренных полей физических величин с гарантированной оценкой точности.

Характерные макромасштабы компонентов течений – волн, вихрей и лигаментов определяют требования к расчетным кодам и полному физическому эксперименту, в частности числу одновременно регистрируемых параметров, размерам области наблюдения и длительности цикла регистрации, позволяющим идентифицировать все крупные элементы течений и проследить их реструктуризацию, а микромасштабы лигаментов – пространственную и временную разрешающую способность инструментов или параметры дискретизации в численном моделировании. Технические возможности современных экспериментальных установок, и также вычислительных комплексов, методы программирования позволяют в единой постановке анализировать решения фундаментальной системы, описывающие динамику и структуру течений, в широком диапазоне параметров, включающем волновые, вихревые и нестационарные режимы [24, 26].

В типичном примере рассчитанной картины стратифицированного течения около препятствия, представленной на Рис. 1. выделены одновременно образующиеся с крупные волны, и вихри и высокоградиентные прослойки.

Переналожение структурных компонентов с различными пространственно-временными свойствами в наблюдениях и измерениях проявляется как непрерывная изменчивость физических параметров, содержащая и регулярную, и случайную компоненту в силу иррациональности отношений собственных масштабов даже в случае установившегося режима движения тела.



а)

б)

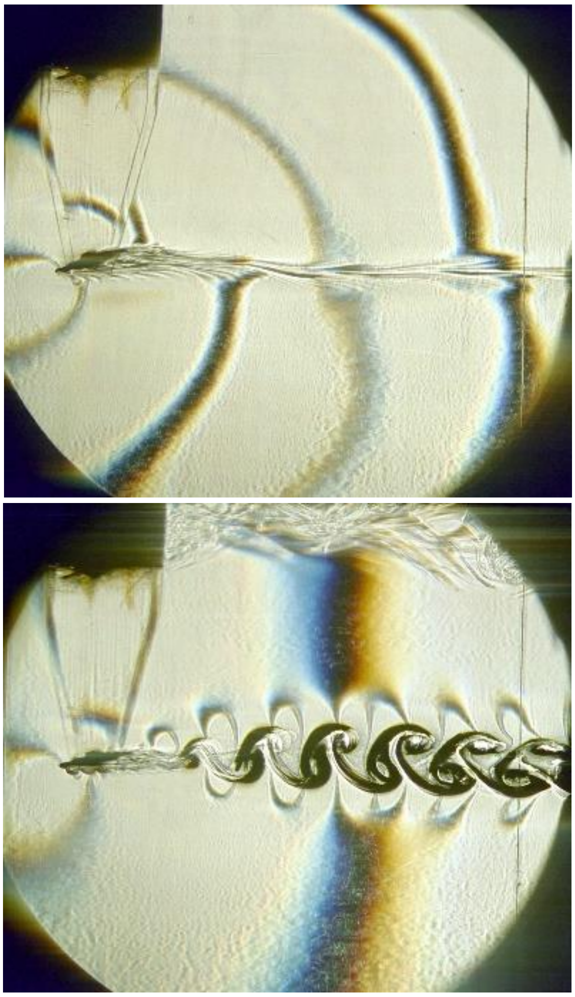
Длина пластины $L = 10$ cm и высота $h = 0.5$ cm , движущейся со скоростью $U_0 = 100$ см/с в жидкости с частотой плавучести $N = 1.2$ c^{-1}:
а, б) – угол атаки $\alpha = 1^{\circ}, \ 20^{\circ}$

Рисунок 1 – Мгновенная картина распределения возмущений гозиронтальной компоненты градиента плотности в течении около наклонной прямоугольной пластиной

Все структурные компоненты визуализируются в экспериментах по изучению картины обтекания препятствий стратифицированной жидкостью – прозрачным водным раствором поваренной слои переменной концентрации. Эксперименты проводились на стенде ЛПБ (лабораторном передвижном бассейне), входящем в комплекс Уникальных исследовательских установок УИУ «ГФК ИПМех РАН» с иллюминаторами из оптического стекла, позволяющими использовать высокоразрешающий теневой прибор ИАБ-458 [26].

Методика эксперимента была разработана с учетом результатов масштабного анализа системы фундаментальных уравнений. Максимальные масштабы изучаемых явлений ограничены размером области наблюдения теневого прибора, диаметр которого составляет 23 см. Пространственное разрешение ограничено оптическими характеристиками самого прибора и регистрирующей аппаратуры, качество которой непрерывно улучшается по мере совершенствования оптики и компьютерных технологий. В данных экспериментах разрешение составляет 0,005 см и выше, что позволяет изучать структуру тонких и сверхтонких прослоек, образующихся при обтекании тел и падении капель в жидкость [27].

В типичной картине стратифицированного течения вокруг равномерно движущейся наклонной полосы, представленной на рисунке 2, в разной степени полноты выражены все указанные компоненты течений – при малых скоростях лигаменты (тонкие полосчатые структуры) и внутренние волны, гребням и впадинам которых соответствуют темные и серые полосы на рисунке 2, а. С увеличением скорости лигаменты постепенно перестраиваются в пространственно упорядоченные системы вихрей, типичные для следов за плохо обтекаемыми телами (рисунок 2, *б*).



а)

б)

a, b) – скорость пластины $U = 1.4, \ 3.6$ см/с

Рисунок 2 – Волны, лигаменты и вихри в движущейся наклонной пластины длиной $L = 2.5$ см $T_b = 7.6$ с, угол атаки $\alpha = -16^{\circ}$

Наличие подъемной силы проявляется в изменении структуры фазовых поверхностей внутренних волн (на рисунке 2, *б* они смещены в верхнем и нижнем полупространствах по сравнению с рисунком 2, *а*) и асимметрии оболочек вихревых диполей.

На практике в силу сложности полной системы (9) для описания каждого конкретного вида течений все еще составляются индивидуальные модели: редуцированные, основанные на упрощении исходной системы (теории волн, пограничного слоя, конвекции) или конститутивные (теории турбулентности [8]) с собственными законами сохранения. Поскольку вид уравнений определяет смысл входящих в них физических величин, изменение симметрий уравнений меняет содержание входящих понятий, обозначаемых зачастую одинаковыми символами, что затрудняет экспериментальную проверку расчетов, сопоставление выводов различных теорий, накопление данных для последующего анализа и обобщений.

Заключение

Из определений математики, физики и рациональной механики следует необходимость развития теории течений и методик экспериментальных исследований с учетом наблюдаемости базовых величин, набор которых определяются видом инфинитезимальных симметрий систем фундаментальных уравнений, порождающих законы сохранения.

Из вида системы фундаментальных уравнений механики жидкостей следует, что наблюдаемыми, то есть допускающими измерение с одновременной оценкой погрешности, являются импульс течений, а также давление, плотность, температура среды и концентрации растворенных компонент.

Поскольку фундаментальная система уравнений масштабно инвариантна, входящие в базовую классификацию компоненты – волны, вихри и лигаменты – тонкоструктурные прослойки и волокна с высоким уровнем завихренности и градиентов всех физических параметров – существуют во всем диапазоне параметров течений. Базовые компоненты течений визуализируются в численных расчетах и высокоразрешающих лабораторных экспериментах.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке ФАНО России (проект АААА-А17-117021310378-8 "Разработка согласованных аналитико-численных методов расчета динамики и структуры течений жидкостей и методик сравнения с данными высокоразрешающих экспериментов на стендах УСУ «ГФК ИПМех РАН») и частично РФФИ (грант 18-05-00870).

Список литературы

1 Галилей Г. Пробирных дел мастер. М.: Наука. 1987. 272 с.

2 Декарт Р. Первоначала философии. Соч. в 2 т.-Т. 1. М.: Мысль. 1989. С. 297-422.

3 Лейбниц Г.В. Краткое доказательство примечательной ошибки Декарта... Соч. в 4 том. Т. I. М.: Мысль. 1981. С. 118 -125.

4 Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука. 1989. 688 с.

5 Бернулли Д. Гидродинамика, или записки о силах и движениях сингулярно возмущенных жидкостей. Л.: Изд. АН СССР. 1950. 551 с.

6 D'Alembert J.- R. Réflexions sur la cause générale des vents, Paris; 1744.

7 Эйлер Л. Общие законы движения жидкостей // Мех. жидк. и газа. 1999. № 6. С. 26-54.

8 Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Теорет. физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 2006. 732 с.

9. Fourier J. Théorie analytique de la chaleur. Paris: Firmin Didot Père et Fils. 1822. 639 s.

10 Navier C.-L.-M.-H. Mémoire sur les Lois du Mouvement des Fluids // Mém. d l'Acad. des Sciences. 1822. V. 6. P. 389-417.

11. Stokes G.G. On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic bodies // Trans. Cam. Phil. Soc. 1845. V. 8. P. 287-305;

12 Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // УМН. 2003. Т .58. № 2. С.45–78. DOI: 10.4213/rm610.

13. Сомсиков В.М. Открытые неравновесные динамические системы // Журнал проблем эволюции открытых систем. 2017. Т.19 № 2. С. 33 – 47.

14 Fick, A. Ueber Diffusion // Annalen der Physik. 1855. V. 94. P. 59–86. doi:10.1002/andp.18551700105.

15 Maxwell J.C. Remarks on the Mathematical Classification of Physical Quantities // Proc. L. Math. Soc. 1871. V. 3, S. 1-3. P. 224-233.
16 Менделеев Д.И. Об упругости газов. СПб. 1875. 295 с.
17 Менделеев Д.И. Исследование водных растворов по удельному весу. СПб.1887. 520с.
18 Гиббс Дж. Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука 1982. 584 с.
19 Reynolds O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels // Proc. R. Soc. Lond. 1883. V. 35. No. 224-226. P. 84-99. doi: 10.1098/rspl.1883.0018
20 Reynolds O. V. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Philos. Trans. 1895. V. 186. P. 123-164.DOI: 10.1098/rsta.1895.0004
21 Chashechkin Yu. D. Differential fluid mechanics – harmonization of analytical, numerical and laboratory models of flow // Mathematical Modeling and Optimization of Complex Structures. Springer Series “Computational Methods in Applied Sciences” V. 40. 2016. 328 p. P. 61-91. DOI: 10.1007/978-3-319-23564-6-5
22 Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
23. Chashechkin Yu.D. Waves, Vortices and Ligaments in Fluid Flows of Different Scales // Physics & Astronomy International Journal. 2018. V. 2(2). P. 105–108. DOI: 10.15406/paij.2018.02.00070
24 Chashechkin Yu. D., Zagumennyi I. V., Dimitrieva N. F. Unsteady Vortex Dynamics Past a Uniformly Moving Tilted Plate // Proceedings. Topical Problems of Fluid Mechanics 2018, Prague, February 21 – 23, 2018. P. 47 -- 56. DOI: https://doi.org/10.14311/TPFM.2018.007
25 Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д. Новый механизм нелинейной генерации внутренних волн // Докл. АН. 2002. Т. 382. № 6. С. 772–776
26 Чашечкин Ю.Д. Структура и динамика природных течений: теоретическое и лабораторное моделирование // Актуальные проблемы механики. 50 лет Институту проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН. М.: Наука. 2015. С. 63-78.
27. Ильиных А.Ю., Чашечкин Ю.Д. Гидродинамика погружающейся капли: линейчатые структуры на поверхности венца // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2017. № 2. С. 152–165. DOI: 10.1134/S0015462817020144

Принято к печати 24.04.2018

Ю.Д. Чашечкин
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН, Россия, Москва
e-mail: chakin@ipmnet.ru

ЗАРОЖДЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОСНОВ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТЕЙ

Аннотация. Приводится краткое описание истории развития теории течений жидкостей, проводится анализ аксиоматики классической механики жидкости и твердого тела с учетом условия наблюдаемости рассчитываемых величин. Определяющие уравнения представлены в дифференциальной форме законов сохранения вещества, импульса, энергии. Классическая система уравнений механики жидкостей анализируется с учетом условия совместности методами теории сингулярных возмущений. Решения системы уравнений, описывающие волны, вихри и тонкие прослойки – лигаменты, сравниваются с результатами численных расчетов и высокоразрешающего лабораторного моделирования стратифицированных течений.

Ключевые слова: аксиоматика, фундаментальные уравнения, полные решения

Ю.Д. Чашечкин
РҒА А.Я. Ишлинский атындағы Механика мәселелері институты, Ресей, Мәскеу
e-mail: chakin@ipmnet.ru

СУЙЫҚТЫҚТАР МЕХАНИКАСЫНЫҢ ТУЫНДАУЫ ЖӘНЕ ДАМУЫ

Аннотация. Қысқаша сипаттамасы келтіріледі даму тарихының теориясы ағымдардың сұйықтықтарды талдау жүргізіледі, аксиоматики классикалық механика сұйықтар және қатты дененің ескере отырып, шарттары есептелетін шама. Анықтайтын теңдеу ұсынылған дифференциалды түрде заңдарын сақтау заттың импульстің энергиясы. Классикалық теңдеулер жүйесі механика сұйықтар талданады ескере отырып, шарттары бірлескен әдістерімен теориясы сингулярных қалыптанған. Теңдеулер жүйесін шешудің сипаттайтын толқындар, вихри және жіңішке дәнекерден – лигаменты, нәтижелерімен салыстырылады сандық есептер мен өте дәл зертханалық модельдеу стратифицировлық ағымдар.
Түйін сөздер: аксиоматика, іргелі теңдеулер, толық шешімдер

Yu. D. Chashechkin
A.Yu. Ishlinskii Institute of mechanics problems, Russia, Moskow
e-mail: chakin@ipmnet.ru

THE FOUNDATION AND DEVELOPMENT OF LIQUID MECHANICS BASICS

Abstract. A brief description of the history of the theory of fluid flows development is given, an axiomatic analysis of the classical mechanics of liquids and solids is performed, taking into account the observability condition for the quantities being calculated. The governing equations are represented in the differential form of the laws of conservation of matter, momentum, energy and concentration of impurities. The system of governing equations for the mechanics of liquids is analyzed taking into account the compatibility condition using the methods of the theory of singular perturbations. The solutions of the governing system describing waves, vortices, and ligaments that are thin interfaces are compared with the results of numerical calculations and high resolution laboratory modeling of stratified flows.
Keywords: axiomatics, fundamental equations, complete solutions